Institut für Mathematik
der Universität Paderborn
Dr. J. Kuit und Dr. C. Heyer

SoSe 2026
Freitag, 24.04.2026
Blatt 2

Übungen zur Analysis für Informatik

Aufgabe 5.[10 Punkte] Bestimmen Sie, falls existent, das Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (in $\mathbb{R}$) der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$:

(i) $M_1 = \left\{(-1)^n \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$;

(ii) $M_2 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \leq 2\}$;

(iii) $M_3 = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 \leq 2\}$;

(iv) $M_4 = \left\{\frac{n}{2^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$;

(v) $M_5 = \left\{\frac{m^2}{n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N}\right\}$.

(*Hinweis:* Es darf benutzt werden, dass zwischen zwei unterschiedlichen reellen Zahlen immer eine rationale Zahl liegt.)

Lösung.

(i) (2 Punkte) Es gilt $\sup M_1 = \max M_1 = \frac{1}{2}$ und $\inf M_1 = \min M_1 = -1$.

(ii) (2 Punkte) Es gilt $M_2 = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, also $\sup M_2 = \max M_2 = \sqrt{2}$ und $\inf M_2 = \min M_2 = -\sqrt{2}$.

(iii) (2 Punkte) Es gilt $M_2 = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$, also $\sup M_2 = \sqrt{2}$ und $\inf M_2 = -\sqrt{2}$. Wegen $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ existieren weder das Maximum noch das Minimum.

(iv) (2 Punkte) Nach Präsenzaufgabe 3 gilt $n^2 \leq 2^n$, für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 3$. Daraus folgt $0 < \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \neq 3$. Daraus folgt $0 \leq \inf M_4 \leq \inf \left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} = 0$, also $\inf M_4 = 0$. Wegen $0 \notin M_4$ existiert das Minimum nicht.

Es gilt $\sup M_4 = \max M_4 = \frac{1}{2}$, denn $\frac{3}{2^3} < \frac{1}{2}$ und $\frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{2}$ für alle $n \geq 4$.

(v) (2 Punkte) Wegen $m^2 \in M_5$, für alle $m \in \mathbb{N}$, gilt $\sup M_5 = \infty$ (sprich, das Supremum existiert nicht in $\mathbb{R}$); das Maximum existiert nicht. Wegen $\frac{m^2}{n} > 0$ und $\frac{1}{n} \in M_5$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$, gilt

$$0 \leq \inf M_5 \leq \inf \left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} = 0,$$

also $\inf M_5 = 0$. Wegen $0 \notin M_5$ existiert das Minimum nicht.

Aufgabe 6.[10 Punkte] Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$, und sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 1$. Zeigen Sie, dass $0 < \sqrt[k]{b} - \sqrt[k]{a} < \sqrt[k]{b - a}$.

Lösung. Es seien $0 < a < b$ und $k > 1$. Wir zeigen zunächst $\sqrt[k]{a} < \sqrt[k]{b}$. Wäre $\sqrt[k]{a} \geq \sqrt[k]{b}$, so auch $a = (\sqrt[k]{a})^k \geq (\sqrt[k]{b})^k = b$ im Widerspruch zu $a < b$. Also gilt $\sqrt[k]{a} < \sqrt[k]{b}$.

Angenommen, es wäre $\sqrt[k]{b} - \sqrt[k]{a} \geq \sqrt[k]{b-a}$. Dann gilt $\sqrt[k]{b} \geq \sqrt[k]{b-a} + \sqrt[k]{a}$, und nach dem binomischen Lehrsatz folgt

$$\begin{aligned} b = (\sqrt[k]{b})^k \geq (\sqrt[k]{b-a} + \sqrt[k]{a})^k &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (\sqrt[k]{b-a})^i (\sqrt[k]{a})^{k-i} \\ &\geq (\sqrt[k]{b-a})^k + (\sqrt[k]{a})^k + k\sqrt[k]{b-a}(\sqrt[k]{a})^{k-1} \\ &> b - a + a = b, \end{aligned}$$

aber das ist ein Widerspruch.

Ein alternativer Beweis für $\sqrt[k]{b} - \sqrt[k]{a} < \sqrt[k]{b-a}$ durch Induktion nach k ist wie folgt: Wir setzen $x := \sqrt[k]{a}$ und $y := \sqrt[k]{b}$, sodass also $0 < x < y$, $x^k = a$ und $y^k = b$. Es genügt zu zeigen, dass

$$(y - x)^k \leq y^k - x^k, \tag{1}$$

für alle $k \geq 1$, und dass diese Ungleichung strikt ist für $k > 1$. (Durch Anwenden von $\sqrt[k]{\cdot}$ erhalten wir daraus dann die Aussage.)
Der Induktionsanfang für $k = 1$ ist klar. Für den Induktionsschritt genügt es nun zu zeigen, dass

$$(y-x)^k \leq y^k - x^k \implies (y-x)^{k+1} < y^{k+1} - x^{k+1}.$$

Es gelte nun (1) für ein $k \geq 1$. Aus $0 < x < y$ folgt $x^{k+1} < x^k y$ und $x^{k+1} < xy^k$ und somit auch $-x^k y < -x^{k+1}$ und $-xy^k < -x^{k+1}$. Damit rechnen wir

$$\begin{aligned} (y-x)^{k+1} &= (y-x) \cdot (y-x)^k \\ &\overset{\text{IV}}{\leq} (y-x) \cdot (y^k - x^k) \\ &= y^{k+1} - yx^k - xy^k + x^{k+1} \\ &< y^{k+1} - x^{k+1} - x^{k+1} + x^{k+1} \\ &= y^{k+1} - x^{k+1}. \end{aligned}$$

Also gilt auch der Induktionsschritt, und (1) ist bewiesen.

Aufgabe 7.[10 Punkte] Zeigen Sie die folgenden Identitäten in $\mathbb{R}$:

(i) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}\right)^{48} = 8;$

(ii) $\sqrt[9]{\sum_{j=0}^{18} \binom{18}{j} 2^j} = 9;$

(iii) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{216}} + \left(\frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt{25}}\right)^{-1}\right)^2} = 1;$

(iv) $\left(\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^j\right)^2 = \frac{1 - (\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1} + (\frac{1}{2})^{n+1}}{\frac{3}{2} - \sqrt{2}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. (*Hinweis:* Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 1$ gilt die geometrische Summe: $\sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.)

Lösung.

(i) (2 Punkte) Es gilt $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}\right)^{48} = (\sqrt[16]{2})^{3\cdot 16} = \left((\sqrt[16]{2})^{16}\right)^3 = 2^3 = 8.$

(ii) (2 Punkte) Zunächst gilt nach der binomischen Formel: $\sum_{j=0}^{18}\binom{18}{j}2^j = (2+1)^{18} = 3^{2\cdot 9} = (3^2)^9 = 9^9$ und somit $\sqrt[9]{\sum_{j=0}^{18}\binom{18}{j}2^j} = \sqrt[9]{9^9} = 9.$

(iii) (2 Punkte) Wir rechnen

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{216}} + \left(\frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt{25}}\right)^{-1}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{6}+\tfrac{5}{6}\right)^2} = \sqrt[3]{1^2} = 1.$$

(iv) (4 Punkte) Wir zeigen zunächst, dass $\sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 1$ gilt. Dazu rechnen wir

$$(x-1)\cdot\sum_{j=0}^{n} x^j = \sum_{j=0}^{n} x^{j+1} - \sum_{j=0}^{n} x^j = x^{n+1} + \sum_{j=0}^{n-1} x^{j+1} - \sum_{j=1}^{n} x^j - 1 = x^{n+1} - 1.$$

Teilen wir auf beiden Seiten durch $x-1$ (was wegen $x \neq 1$ möglich ist) so erhalten wir die Behauptung.

Wir wenden nun die geometrische Summe mit $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ an und erhalten

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^j\right)^2 &= \left(\frac{(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n+1}-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}\right)^2 = \frac{\left((\frac{1}{\sqrt{2}})^{n+1}-1\right)^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}}-1)^2}\\
&= \frac{(\frac{1}{\sqrt{2}})^{2\cdot(n+1)} - 2\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n+1} + 1}{\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{2}} + 1}\\
&= \frac{(\frac{1}{2})^{n+1} - 2\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^2\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1} + 1}{\frac{3}{2} - \sqrt{2}}\\
&= \frac{1 - (\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1} + (\frac{1}{2})^{n+1}}{\frac{3}{2} - \sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 8.[10 Punkte] Zeigen Sie die *Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel*: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n \geq \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

(*Hinweis:* Benutzen Sie vollständige Induktion. Für den Induktionsschritt kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x_{n+1} \geq x_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt und dass alle x_i ungleich Null sind. Zeige mithilfe der Bernoullischen Ungleichung, dass

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1} x_i}{(n+1)x_a}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x_{n+1} - x_a}{(n+1)x_a}\right)^{n+1} \geq \frac{x_{n+1}}{x_a},$$

wobei $x_a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ das arithmetische Mittel ist. Folgern Sie daraus den Induktionsschritt.)

Lösung. Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion nach n. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Es sei also $n \geq 1$ so, dass für alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Ungleichung $(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i)^n \geq \prod_{i=1}^{n} x_i$ gilt.
Für den Induktionsschritt seien $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ beliebig. Falls $x_i = 0$ für ein i, so gilt offensichtlich $(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n+1} x_i)^n \geq 0 = \prod_{i=1}^{n+1} x_i$. Durch eventuelle Umnummerierung können wir annehmen, dass $x_{n+1} \geq x_i > 0$, für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt. Wir bezeichnen mit $x_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ das arithmetische Mittel der ersten n Zahlen. Mithilfe der Bernoullischen Ungleichung rechnen wir

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1} x_i}{(n+1)x_a}\right)^{n+1} &= \left(\frac{nx_a + x_{n+1}}{(n+1)x_a}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x_{n+1} - x_a}{(n+1)x_a}\right)^{n+1} \\ &\geq 1 + (n+1) \cdot \frac{x_{n+1} - x_a}{(n+1)x_a} = \frac{x_{n+1}}{x_a}.\end{aligned}$$

Multiplizieren von x_a^{n+1} auf beiden Seiten und Anwenden der Induktionsvoraussetzung $x_a^n \geq \prod_{i=1}^{n} x_i$ liefert

$$\left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geq x_{n+1} \cdot x_a \overset{\text{IV}}{\geq} x_{n+1} \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n+1} x_i.$$

Abgabe: Sonntag, 03.05.2026, 23:59 Uhr