Institut für Mathematik
der Universität Paderborn
Dr. J. Kuit und Dr. C. Heyer

SoSe 2026
Freitag, 01.05.2026
Blatt 3

Übungen zur Analysis für Informatik

Aufgabe 9.[10 Punkte] Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in ihrer Normalform $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar:

(i) $(2 - \mathrm{i})(2 + \mathrm{i})$;

(ii) $\big((5 - 2\mathrm{i}) + (1 - \frac{1}{2}\mathrm{i})\big) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3}\mathrm{i})$;

(iii) $\frac{-4+\sqrt{3}\mathrm{i}}{7+\mathrm{i}}$;

(iv) $(\frac{2\mathrm{i}}{-2+5\mathrm{i}})^2$.

Aufgabe 10.[10 Punkte] Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlen:

(i) $\{z \in \mathbb{C} \mid z = \alpha(1 - \mathrm{i}) \text{ für ein } \alpha \in \mathbb{R} \text{ mit } \alpha \geq 1\}$;

(ii) $\mathbb{Z} + \mathrm{i}\mathbb{Z} = \{n + m\mathrm{i} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$;

(iii) $\{z \in \mathbb{C} \mid -\operatorname{Im}(z)^2 - 4\operatorname{Im}(z) - 5 = \operatorname{Re}(z)\}$;

(iv) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 \leq 4\}$;

(v) $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - 2n| \leq \frac{1}{|n|+1}\right\}$.

Aufgabe 11.[10 Punkte]

(i) Bestimmen Sie für die folgenden $z \in \mathbb{C}$ reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $(a + b\mathrm{i})^2 = z$:
(a) $z = c \in \mathbb{R}$ beliebig; (b) $z = \mathrm{i}$; (c) $z = 5 - 12\mathrm{i}$.

(ii) Es sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig. Zeigen Sie, dass ein $w \in \mathbb{C}$ existiert mit $w^2 = z$.

(*Hinweis:* Man schreibe $z = a + b\mathrm{i}$ und mache den Ansatz $a + b\mathrm{i} = (x + y\mathrm{i})^2$. Man zeige, dass dann $a = x^2 - y^2$ und $b = 2xy$ gelten muss. Daraus folgere man, dass $x^4 - ax^2 - \frac{b^2}{4} = 0$ gilt; dies ist eine quadratische Gleichung in x^2. Nun bestimme man x (in Termen von a und b) und danach y mit $(x + y\mathrm{i})^2 = a + b\mathrm{i}$.)

(iii) Es seien $p, q \in \mathbb{C}$ beliebig. Zeigen Sie, dass die Gleichung $z^2 + pz + q = 0$ in $\mathbb{C}$ eine Lösung besitzt. (*Hinweis:* Quadratische Ergänzung und (i).)

Aufgabe 12.[10 Punkte] Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf (schwache) Monotonie:

(i) $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^3$;

(ii) $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = x - \lfloor x \rfloor$, wobei $\lfloor x \rfloor$ definiert ist als das maximale $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x$;

(iii) $f_3 \colon \mathbb{N}_{\geq 3} \to \mathbb{R}$, $f_3(n) = \frac{n^2}{2^n}$;

(iv) $f_4 \colon \mathbb{R}_{\geq \frac{1}{2}} \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = x^2 - x$.

Abgabe: Sonntag, 10.05.2026, 23:59 Uhr