

Übungen zur Analysis für Informatik

Aufgabe 9.[10 Punkte] Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in ihrer Normalform $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar:

- (i) $(2 - i)(2 + i)$;
- (ii) $((5 - 2i) + (1 - \frac{1}{2}i)) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3}i)$;
- (iii) $\frac{-4 + \sqrt{3}i}{7 + i}$;
- (iv) $(\frac{2i}{-2 + 5i})^2$.

Lösung.

(i) (1 Punkt) Es gilt $(2 - i)(2 + i) = 4 + 1 = 5$.

(ii) (3 Punkte) Es gilt

$$\begin{aligned} \left((5 - 2i) + \left(1 - \frac{1}{2}i\right) \right) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3}i) &= \left(6 - \frac{5}{2}i\right) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3}i) \\ &= 6\sqrt{2} - \frac{5}{2}\sqrt{3} - \left(6\sqrt{3} + \frac{5}{2}\sqrt{2}\right)i. \end{aligned}$$

(iii) (3 Punkte) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{-4 + \sqrt{3}i}{7 + i} &= \frac{(-4 + \sqrt{3}i) \cdot (7 - i)}{(7 + i) \cdot (7 - i)} \\ &= \frac{-28 + \sqrt{3} + (7\sqrt{3} + 4)i}{50} = \frac{\sqrt{3} - 28}{50} + \frac{7\sqrt{3} + 4}{50}i. \end{aligned}$$

(iv) (3 Punkte) Es gilt

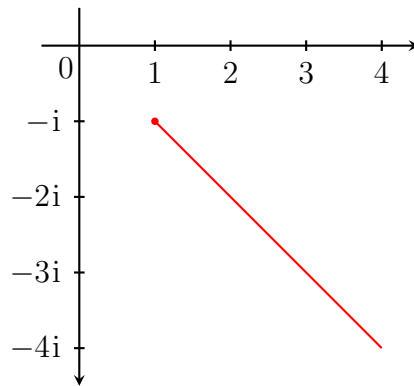
$$\begin{aligned} \left(\frac{2i}{-2 + 5i} \right)^2 &= \frac{4i^2}{4 + 25i^2 + 2 \cdot (-2) \cdot 5i} \\ &= \frac{4}{21 + 20i} = \frac{4 \cdot (21 - 20i)}{(21 + 20i)(21 - 20i)} \\ &= \frac{4 \cdot (21 - 20i)}{441 + 400} = \frac{84}{841} - \frac{80}{841}i. \end{aligned}$$

Aufgabe 10.[10 Punkte] Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlen:

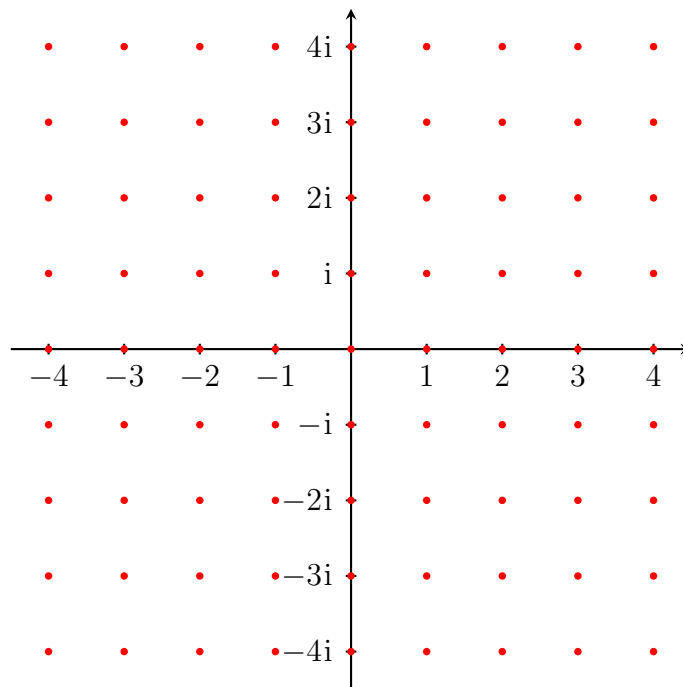
- (i) $\{z \in \mathbb{C} \mid z = \alpha(1 - i) \text{ für ein } \alpha \in \mathbb{R} \text{ mit } \alpha \geq 1\}$;
- (ii) $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z} = \{n + mi \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$;
- (iii) $\{z \in \mathbb{C} \mid -\text{Im}(z)^2 - 4\text{Im}(z) - 5 = \text{Re}(z)\}$;
- (iv) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 \leq 4\}$;
- (v) $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - 2n| \leq \frac{1}{|n|+1} \right\}$.

Lösung.

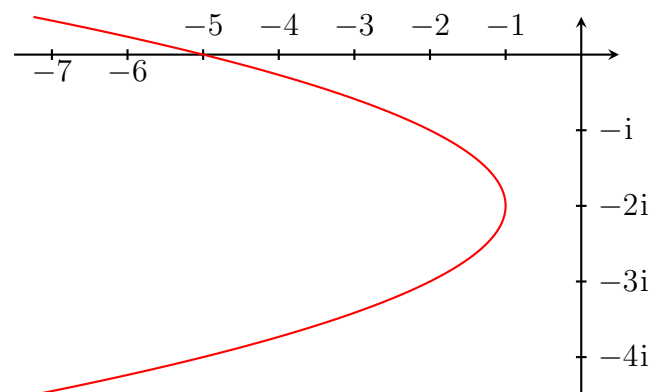
(i) (2 Punkte)



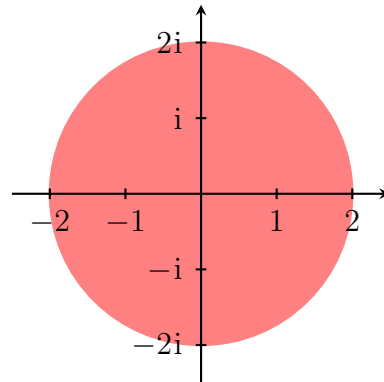
(ii) (2 Punkte)



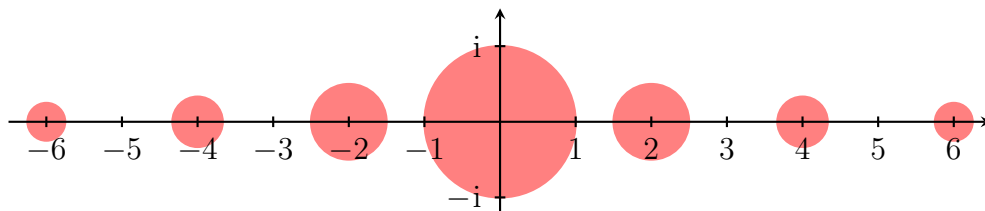
(iii) (2 Punkte)



(iv) (2 Punkte)



(v) (2 Punkte)



Aufgabe 11.[10 Punkte]

- (i) Bestimmen Sie für die folgenden $z \in \mathbb{C}$ reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $(a + bi)^2 = z$:
(a) $z = c \in \mathbb{R}$ beliebig; (b) $z = i$; (c) $z = 5 - 12i$.
- (ii) Es sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig. Zeigen Sie, dass ein $w \in \mathbb{C}$ existiert mit $w^2 = z$.
(*Hinweis:* Man schreibe $z = a + bi$ und mache den Ansatz $a + bi = (x + yi)^2$. Man zeige, dass dann $a = x^2 - y^2$ und $b = 2xy$ gelten muss. Daraus folgere man, dass $x^4 - ax^2 - \frac{b^2}{4} = 0$ gilt; dies ist eine quadratische Gleichung in x^2 . Nun bestimme man x (in Termen von a und b) und danach y mit $(x + yi)^2 = a + bi$.)
- (iii) Es seien $p, q \in \mathbb{C}$ beliebig. Zeigen Sie, dass die Gleichung $z^2 + pz + q = 0$ in \mathbb{C} eine Lösung besitzt. (*Hinweis:* Quadratische Ergänzung und (i).)

Lösung.

- (i) (a) (1 Punkt) Es sei $c \in \mathbb{R}$. Ist $c \geq 0$, so gilt $(\sqrt{c})^2 = c$, also $a = \sqrt{c}$ und $b = 0$. (Es ist auch $a = -\sqrt{c}$ und $b = 0$ möglich, aber eine Lösung reicht hier.) Ist hingegen $c < 0$, so gilt $(\sqrt{-c}i)^2 = (-c) \cdot i^2 = c$, also $a = 0$ und $b = \sqrt{-c}$. (Oder $a = 0$ und $b = -\sqrt{-c}$.)
- (b) (2 Punkte) Es sei $z = i$. Wir machen den Ansatz $(a + bi)^2 = i$ und erhalten $i = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$. Daraus erhalten wir die Bedingungen $a^2 - b^2 = 0$ und $2ab = 1$. Aus der zweiten Bedingung folgt, dass a und b dasselbe Vorzeichen haben. Daher ergibt die erste Bedingung, dass $a = b$. Die zweite Bedingung lautet somit $2a^2 = 1$, das heißt $a = b = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Somit gilt zum Beispiel $(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)^2 = i$.
- (c) (2 Punkte) Es sei $z = 5 - 12i$. Wir machen den Ansatz $(a + bi)^2 = 5 - 12i$ und erhalten $5 - 12i = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$. Daraus erhalten wir die Bedingungen $a^2 - b^2 = 5$ und $2ab = -12$. Treffen wir weiterhin die Annahme,

dass $a, b \in \mathbb{Z}$, so finden wir wegen $ab = -6$ für (a, b) die Möglichkeiten $\pm(1, -6)$, $\pm(2, -3)$, $\pm(3, -2)$ und $\pm(6, -1)$. Wegen $a^2 - b^2 = 5$ ist nur $(a, b) = \pm(3, -2)$ möglich. Und in der Tat gilt $(3 - 2i)^2 = 5 - 12i$.

- (ii) (4 Punkte) Wir schreiben $z = a + bi$ und machen den Ansatz $a + bi = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Wir erhalten daraus die Bedingungen

$$x^2 - y^2 = a \quad (1)$$

$$2xy = b. \quad (2)$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir $y^2 = x^2 - a$ und aus der zweiten $4x^2y^2 = b^2$. Durch Einsetzen erhalten wir $b^2 = 4x^2y^2 = 4x^2(x^2 - a) = 4x^4 - 4ax^2$. Mit anderen Worten, es gilt

$$x^4 - ax^2 - \frac{b^2}{4} = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in x^2 . Also gilt $x^2 = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.

Wegen $|a| + \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ gilt $x := \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \in \mathbb{R}$. Es sei $\varepsilon = \operatorname{sgn}(b)$ das Vorzeichen von b , sprich $\varepsilon = 1$, falls $b \geq 0$ und $\varepsilon = -1$, falls $b < 0$. Wir definieren nun $y := \varepsilon \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \in \mathbb{R}$. Wir überprüfen (1) und (2):

$$x^2 - y^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} - \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} = a,$$

und

$$2xy = 2\varepsilon \sqrt{\frac{(a + \sqrt{a^2 + b^2})(-a + \sqrt{a^2 + b^2})}{4}} = \varepsilon \sqrt{-a^2 + (a^2 + b^2)} = \varepsilon \sqrt{b^2} = b.$$

Also haben wir $x, y \in \mathbb{R}$ gefunden mit $(x + yi)^2 = a + bi$.

- (iii) (1 Punkt) Durch quadratische Ergänzung erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= z^2 + pz + q = z^2 + pz + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} \\ &= \left(z + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}. \end{aligned}$$

Durch Umstellen erhalten wir $(z + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - q$. Nach (ii) existiert ein $w \in \mathbb{C}$ mit $w^2 = \frac{p^2}{4} - q$ und somit ist $z = -\frac{p}{2} \pm w$ so, dass $z^2 + pz + q = 0$.

Aufgabe 12.[10 Punkte] Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf (schwache) Monotonie:

- (i) $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^3$;
(ii) $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = x - [x]$, wobei $[x]$ definiert ist als das maximale $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x$;
(iii) $f_3: \mathbb{N}_{\geq 3} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_3(n) = \frac{n^2}{2^n}$;
(iv) $f_4: \mathbb{R}_{\geq \frac{1}{2}} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_4(x) = x^2 - x$.

Lösung.

- (i) (3 Punkte) Die Abbildung f_1 ist streng monoton wachsend: Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Falls $x > 0$, so gilt auch $y > 0$. Wir erhalten $x^3 < x^2y < xy^2 < y^3$. Falls $x = 0$, so haben wir $0 < y^3$. Es sei nun $x < 0$. Falls $y < 0$, so gilt $-x > -y > 0$ und somit $-x^3 = (-x)^3 > (-y)^3 = -y^3$, also $x^3 < y^3$. Falls $y = 0$, so gilt offenbar $x^3 < 0$. Falls $y > 0$, so gilt $x^3 < 0 < y^3$. In allen Fällen gilt $x^3 < y^3$. Also ist $f_1: x \mapsto x^3$ streng monoton wachsend.
- (ii) (1 Punkt) Die Abbildung f_2 ist nicht monoton, denn $f_2(0) = f_2(1) = 0$ und $f_2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.
- (iii) (3 Punkte) Die Abbildung f_3 ist streng monoton fallend: Es sei $n \geq 3$. Wir behaupten, dass $\frac{n^2}{2^n} > \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$. Wegen $n \geq 3$ gilt $n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 > 2$. Durch Umstellen erhalten wir daraus $n^2 > 2n + 1$. Multiplikation mit 2^n liefert $2^n n^2 > 2^n 2n + 2^n$. Also gilt

$$n^2 2^{n+1} = n^2 2^n + n^2 2^n > n^2 2^n + 2^n 2n + 2^n = (n+1)^2 2^n.$$

Durch Umstellen erhalten wir daraus $\frac{n^2}{2^n} > \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$ wie gewünscht.

- (iv) (3 Punkte) f_4 ist streng monoton wachsend: Durch quadratische Ergänzung erhalten wir

$$f_4(x) = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Sind also $\frac{1}{2} \leq x < y$, so gilt $x - \frac{1}{2} \geq 0$ und $y - \frac{1}{2} \geq 0$, und somit $(x - \frac{1}{2})^2 \leq (y - \frac{1}{2})^2$. Daraus folgt $f_4(x) < f_4(y)$.

Abgabe: Sonntag, 10.05.2026, 23:59 Uhr