Institut für Mathematik
der Universität Paderborn
Dr. J. Kuit und Dr. C. Heyer

SoSe 2026
Freitag, 08.05.2026
Blatt 4

Übungen zur Analysis für Informatik

Aufgabe 13.[10 Punkte] Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen in $\mathbb{C}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

(ii) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, so ist $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt.

(iii) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $(\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt.

(iv) Gilt $|a_n| < |a_{n+1}| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Aufgabe 14.[10 Punkte, Newton-Verfahren] Seien $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}_{>0}$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n - c$. Wir schreiben f' für die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto nx^{n-1}$. Wir definieren eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv durch $x_0 \coloneqq 1$ und

$$x_{k+1} \coloneqq x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad \text{für alle } k \geq 0.$$

(i) Zeigen Sie, dass $x_k^n \geq c$ für alle $k \in \mathbb{N}$. (*Hinweis:* die Bernoulli Ungleichung könnte hilfreich sein.)

(ii) Zeigen Sie, dass $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend ist.

(iii) Zeigen Sie, dass $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ konvergent ist mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \sqrt[n]{c}$.

Aufgabe 15.[10 Punkte] Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und geben Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert an:

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{-n^3+1}{3n^5-2} + 3$;

(ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = (-1)^n\sqrt{n^2+1}$;

(iii) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
(*Hinweis:* Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ mit $x \neq -y$ gilt $x - y = \frac{x^2-y^2}{x+y}$.)

(iv) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = \frac{n!}{n^n+2n^2+5}$.

Aufgabe 16.[10 Punkte] Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

konvergiert.
(*Hinweis:* Verwenden Sie den binomischen Lehrsatz, um zu zeigen, dass

$$a_n = 2 + \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zeigen Sie anschließend die Ungleichung $\binom{n}{j}\frac{1}{n^j} \leq \frac{1}{j(j-1)} = \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $j \geq 2$ und folgern Sie

$$a_n = 2 + \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} \leq 3 - \frac{1}{n} < 3$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie danach, zum Beispiel mit der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel (Hausaufgabe 8), dass $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und verwenden Sie anschließend den Satz von der monotonen Konvergenz.
Später werden wir zeigen, dass der Grenzwert die *Eulersche Konstante* e ist.)

Abgabe: Sonntag, 17.05.2026, 23:59 Uhr