

## Übungen zur Analysis für Informatik

**Aufgabe 13.**[10 Punkte] Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei Folgen in  $\mathbb{C}$ . Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (i) Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge, so ist  $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge.
- (ii) Sind  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unbeschränkt, so ist  $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unbeschränkt.
- (iii) Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unbeschränkt,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent und  $b_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so ist  $(\frac{a_n}{b_n})_{n \in \mathbb{N}}$  unbeschränkt.
- (iv) Gilt  $|a_n| < |a_{n+1}| \leq 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent.

*Lösung.*

- (i) (3 Punkte) Die Aussage ist wahr. Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt, so existiert ein  $M \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n| \leq M$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Um zu zeigen, dass  $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge ist, sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Da  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge ist, existiert  $N \in \mathbb{N}$  so, dass  $|b_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ , für alle  $n \geq N$ . Damit gilt

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

für alle  $n \geq N$ . Also ist  $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge.

- (ii) (2 Punkte) Die Aussage ist falsch. Seien zum Beispiel  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegeben durch

$$a_n := \begin{cases} n, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{und} \quad b_n := \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Diese Folgen sind nach Konstruktion unbeschränkt, aber es gilt  $a_n b_n = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Insbesondere ist  $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt.

- (iii) (2 Punkte) Die Aussage ist wahr. Da die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent ist, ist sie beschränkt durch ein  $R > 0$ : Es gilt also  $|b_n| \leq R$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Es sei nun  $M \in \mathbb{R}$  beliebig. Da  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unbeschränkt ist, existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n| \geq RM$ . Dann aber gilt

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| = \frac{|a_n|}{|b_n|} \geq \frac{|a_n|}{R} \geq \frac{RM}{R} = M.$$

Da  $M$  beliebig war, folgt, dass  $(\frac{a_n}{b_n})_{n \in \mathbb{N}}$  unbeschränkt ist.

- (iv) (3 Punkte) Die Aussage ist falsch. Wir betrachten die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = (-1)^n \cdot (1 - \frac{1}{n})$ . Dann gilt  $|a_n| = 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1} = |a_{n+1}|$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , aber  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert nicht: Andernfalls gäbe es ein  $a \in \mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Es sei nun  $0 < \varepsilon < \max\{|a - 1|, |a + 1|\}$  beliebig und  $N \in \mathbb{N}$  so, dass  $|a_n - a| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte  $|a - 1| \geq |a + 1|$ ; der andere Fall wird analog behandelt. Wähle nun ein  $N' \geq N \in \mathbb{N}$  so, dass  $\frac{1}{N'} < |a - 1| - \varepsilon$ . Für gerades  $n \geq N'$  gilt nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|a_n - a| = \left| 1 - \frac{1}{n} - a \right| \geq |1 - a| - \frac{1}{n} > \varepsilon$$

im Widerspruch zu  $|a_n - a| < \varepsilon$ . Also ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergent.

**Aufgabe 14.** [10 Punkte, Newton-Verfahren] Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^n - c$ . Wir schreiben  $f'$  für die Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto nx^{n-1}$ . Wir definieren eine Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  rekursiv durch  $x_0 := 1$  und

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \text{für alle } k \geq 0.$$

- (i) Zeigen Sie, dass  $x_k^n \geq c$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . (*Hinweis:* die Bernoulli Ungleichung könnte hilfreich sein.)
- (ii) Zeigen Sie, dass  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  monoton fallend ist.
- (iii) Zeigen Sie, dass  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  konvergent ist mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \sqrt[n]{c}$ .

*Lösung.*

- (i) (4 Punkte) Wir zeigen  $x_k^n \geq c$  durch Induktion nach  $k \in \mathbb{N}$ . Für  $k = 1$  gilt  $x_1^n = (1 - \frac{1-c}{n})^n \geq 1 - (1-c) = c$  nach der Bernoulli-Ungleichung (diese ist hier anwendbar wegen  $\frac{1-c}{n} \leq 1$ ). Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass  $x_k^n \geq c$  für ein  $k \geq 1$ . Wegen  $x_k^n \geq c > 0$  gilt  $\frac{1}{n} \cdot (1 - \frac{c}{x_k^n}) \leq 1$ ; wieder mit der Bernoulli-Ungleichung rechnen wir nun

$$\begin{aligned} x_{k+1}^n - c &= \left( x_k - \frac{x_k^n - c}{nx_k^{n-1}} \right)^n - c = x_k^n \cdot \left( 1 - \frac{1}{n} \cdot \left( 1 - \frac{c}{x_k^n} \right) \right)^n - c \\ &\geq x_k^n \cdot \left( 1 - \left( 1 - \frac{c}{x_k^n} \right) \right) - c = c - c = 0. \end{aligned}$$

Dies beendet die Induktion.

- (ii) (2 Punkte) Aus (i) wissen wir, dass  $x_k^n \geq c$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt. Somit gilt  $\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{x_k^n - c}{nx_k^{n-1}} > 0$ . Daraus folgt

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} < x_k.$$

Also ist  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  monoton fallend.

- (iii) (4 Punkte) Da  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  nach (ii) eine monoton fallende Folge ist, die nach (i) nach unten durch  $\sqrt[n]{c}$  beschränkt ist, so ist sie konvergent. Sei also  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \geq$

$\sqrt[n]{c} > 0$  der Grenzwert. Mit den Rechenregeln für konvergente Folgen erhalten wir nun

$$\begin{aligned} x - \frac{f(x)}{f'(x)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} x_k - \frac{(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k)^n - c}{n \cdot (\lim_{k \rightarrow \infty} x_k)^{n-1}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} x_k - \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k^n - c)}{\lim_{k \rightarrow \infty} n x_k^{n-1}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} x_k - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k^n - c}{n x_k^{n-1}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( x_k - \frac{x_k^n - c}{n x_k^{n-1}} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = x. \end{aligned}$$

Aus  $x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x$  erhalten wir durch Umstellen  $x^n - c = f(x) = 0$ . Wegen  $x > 0$  gilt also  $x = \sqrt[n]{c}$ , wie gewünscht.

**Aufgabe 15.**[10 Punkte] Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und geben Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert an:

- (i)  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = \frac{-n^3+1}{3n^5-2} + 3$ ;
- (ii)  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $b_n = (-1)^n \sqrt{n^2 + 1}$ ;
- (iii)  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ;  
(Hinweis: Für alle  $x, y \in \mathbb{C}$  mit  $x \neq -y$  gilt  $x - y = \frac{x^2 - y^2}{x+y}$ .)
- (iv)  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $d_n = \frac{n!}{n^n + 2n^2 + 5}$ .

*Lösung.*

- (i) (2 Punkte) Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen 3, denn es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-n^3 + 1}{3n^5 - 2} + 3 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^5}}{3 - \frac{2}{n^5}} + 3 = 0 + 3 = 3.$$

- (ii) (2 Punkte) Da  $x \mapsto \sqrt{x}$  monoton wachsend ist, gilt  $\sqrt{n^2 + 1} \geq \sqrt{n^2} = n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Also ist  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unbeschränkt und insbesondere divergent.
- (iii) (3 Punkte) Die Folge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Nullfolge. In der Tat gilt nach der dritten binomischen Formel

$$\begin{aligned} c_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

- (iv) (3 Punkte) Die Folge  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Nullfolge. Zunächst zeigen wir  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ . Für jedes  $n \geq 1$  rechnen wir

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Nach dem Einschnürungsprinzip ist  $(\frac{n!}{n^n})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge. Nun gilt mit den Rechenregeln für konvergente Folgen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n + 2n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!/n^n}{1 + 2n^{2-n} + 5n^{-n}} = 0,$$

wobei wir für die letzte Gleichung benutzt haben, dass der Zähler eine Nullfolge ist und der Nenner gegen 1 konvergiert.

**Aufgabe 16.**[10 Punkte] Zeigen Sie, dass die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

konvergiert.

(*Hinweis:* Verwenden Sie den binomischen Lehrsatz, um zu zeigen, dass

$$a_n = 2 + \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} \frac{1}{n^j}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Zeigen Sie anschließend die Ungleichung  $\binom{n}{j} \frac{1}{n^j} \leq \frac{1}{j(j-1)} = \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}$  für alle  $j \in \mathbb{N}$  mit  $j \geq 2$  und folgern Sie

$$a_n = 2 + \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} \leq 3 - \frac{1}{n} < 3$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Zeigen Sie danach, zum Beispiel mit der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel (Hausaufgabe 8), dass  $a_n \leq a_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt und verwenden Sie anschließend den Satz von der monotonen Konvergenz.

Später werden wir zeigen, dass der Grenzwert die *Eulersche Konstante*  $e$  ist.)

*Lösung.* Nach dem binomischen Lehrsatz gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} = \binom{n}{0} \frac{1}{n^0} + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} \\ &= 2 + \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} \frac{1}{n^j}. \end{aligned}$$

Wir rechnen nun, für jedes  $j \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-j+1)}{j!} \cdot \frac{1}{n^j} \\ &= \frac{1}{j!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-j+1}{n} \leq \frac{1}{j!} \leq \frac{1}{j(j-1)} = \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$a_n = 2 + \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} \leq 2 + \sum_{j=2}^n \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}\right) = 2 + 1 - \frac{1}{n} < 3.$$

Wir zeigen nun  $a_n \leq a_m$  für jedes  $n \leq m$ . Sei also  $n < m$  vorgegeben. Wir bemerken zunächst, dass  $\frac{n-i}{n} = 1 - \frac{i}{n} < 1 - \frac{i}{m} = \frac{m-i}{m}$ , für jedes  $1 \leq i \leq n$ . Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} &= \frac{1}{j!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-j+1}{n} \\ &< \frac{1}{j!} \cdot \frac{m}{m} \cdot \frac{m-1}{m} \cdots \frac{m-j+1}{m} = \binom{m}{j} \frac{1}{m^j}. \end{aligned}$$

Schießlich erhalten wir die Abschätzung

$$a_n = 2 + \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} < 2 + \sum_{j=2}^n \binom{m}{j} \frac{1}{m^j} < 2 + \sum_{j=2}^m \binom{m}{j} \frac{1}{m^j} = a_m$$

wie gewünscht. Alternativ kann man für  $a_n \leq a_{n+1}$  auch die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel anwenden und rechnet:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 \cdot \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \left(\frac{1}{n+1} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{1}{n+1} \cdot (n+2)\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}. \end{aligned}$$

Also ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton steigende und nach oben beschränkte Folge. Nach dem Satz über monotone Konvergenz ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  demnach konvergent mit einem Grenzwert im Intervall  $[2, 3]$ .

**Abgabe:** Sonntag, 17.05.2026, 23:59 Uhr