Institut für Mathematik
der Universität Paderborn
Dr. J. Kuit und Dr. C. Heyer

SoSe 2026
Freitag, 15.05.2026
Blatt 5

Übungen zur Analysis für Informatik

Aufgabe 17.[10 Punkte] Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{\sqrt[n]{n}+\frac{2^n}{n!}}{\sqrt[3]{n}} + 8\sqrt[n]{n} - 3$;

(ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$;

(iii) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \frac{n^5-n+7}{5n^5+1}$;

(iv) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = (-1)^n\frac{n^5-n+7}{5n^5+1}$;

Aufgabe 18.[10 Punkte] Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Wir definieren eine weitere Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$s_n \coloneqq \frac{1}{n}\cdot(a_1+a_2+\cdots+a_n), \qquad \text{für } n\in\mathbb{N}.$$

(i) Zeigen Sie: Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a\in\mathbb{C}$ konvergiert, so konvergiert auch $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

(ii) Gilt auch die Umkehrung? Beweisen Sie, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 19.[10 Punkte] Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, wobei $a_0\in\mathbb{R}$ und

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}, \qquad \text{für } n\in\mathbb{N}_0.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert, falls $0\le a_0\le\frac{1}{2}$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, falls $a_0>\frac{1}{2}$. (*Hinweis:* Zeigen Sie, dass $a_n\ge a_0+n(a_0-\frac{1}{2})^2$ gilt für alle $n\in\mathbb{N}$.)

(iii) Welches Konvergenzverhalten hat die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für $a_0<0$?

Aufgabe 20.[10 Punkte] Es sei φ der goldene Schnitt, also die positive Lösung der quadratischen Gleichung $\varphi^2-\varphi-1=0$. Die *Fibonacci-Folge* bezeichnet die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die rekursiv gegeben ist durch $f_0\coloneqq f_1\coloneqq 1$ und $f_{n+1}\coloneqq f_n+f_{n-1}$ für $n\ge 1$. Zeigen Sie, dass

$$|f_{n+1}-\varphi f_n| \le \frac{1}{\varphi^{n+1}}$$

für alle $n\in\mathbb{N}_0$ gilt und folgern Sie $\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=\varphi$. (*Hinweis:* Die Beziehungen $\varphi^{-1}=\varphi-1$ und $\varphi^{-2}=2-\varphi$ könnten hilfreich sein.)

Abgabe: Sonntag, 24.05.2026, 23:59 Uhr