

Übungen zur Analysis für Informatik

Aufgabe 17.[10 Punkte] Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:

- (i) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{\sqrt[n]{n+2^n}}{\sqrt[3]{n}} + 8\sqrt[n]{n} - 3$;
- (ii) $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$;
- (iii) $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = \frac{n^5-n+7}{5n^5+1}$;
- (iv) $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = (-1)^n \frac{n^5-n+7}{5n^5+1}$;

Lösung.

- (i) (3 Punkte) Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$: Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{1}{3}} = 0$. Nach Präsenzaufgabe 13(iii) gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$. Mit den Rechenregeln für konvergente Folgen ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{n+2^n}}{\sqrt[3]{n}} + 8\sqrt[n]{n} - 3 \right) &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} \right) + 8 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} - 3 \\ &= 0(1+0) + 8 \cdot 1 - 3 = 5. \end{aligned}$$

- (ii) (2 Punkte) Die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert (gegen ∞). In der Tat, in Aufgabe 15(iii) haben wir gesehen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$. Also existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq 1$ gilt, für alle $n \geq N$. Aber dann gilt $b_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$ für alle $n \geq N$. Aus der Divergenz von $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ ergibt sich nun die Divergenz von $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (iii) (3 Punkte) Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{5}$, denn mit den Rechenregeln für konvergente Folgen ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 - n + 7}{5n^5 + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n^4} + \frac{7}{n^5}}{5 + \frac{1}{n^5}} = \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n^5}}{5 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5}} \\ &= \frac{1 - 0 + 0}{5 + 0} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

- (iv) (2 Punkte) Die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert, da sie zwei Teilfolgen besitzt, die gegen unterschiedliche Grenzwerte konvergieren: $(d_{2n})_{n \in \mathbb{N}} = (c_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nach (iii) gegen $\frac{1}{5}$ und $(d_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}} = (-c_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nach (iii) gegen $-\frac{1}{5}$. Da in einer konvergenten Folge jede Teilfolge gegen denselben Grenzwert konvergiert, ergibt sich im Umkehrschluss, dass $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert.

Aufgabe 18.[10 Punkte] Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{C} . Wir definieren eine weitere Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$s_n := \frac{1}{n} \cdot (a_1 + a_2 + \cdots + a_n), \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

- (i) Zeigen Sie: Wenn $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{C}$ konvergiert, so konvergiert auch $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a .
- (ii) Gilt auch die Umkehrung? Beweisen Sie, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Lösung.

- (i) (6 Punkte) Es gelte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > N$. Für alle $n > \max\{N, \frac{2}{\varepsilon} \sum_{k=1}^N |a_k - a|\}$ gilt dann auch

$$\begin{aligned} |s_n - a| &= \left| \frac{a_1 + \cdots + a_n - n \cdot a}{n} \right| \\ &= \frac{1}{n} \cdot |(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)| \\ &\leq \frac{1}{n} \cdot (|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_n - a|) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |a_k - a| + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n |a_k - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - N}{n} \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Dies zeigt $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a$.

- (ii) (4 Punkte) Die Umkehrung gilt nicht: Zum Beispiel ist die Folge $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent. Es gilt aber

$$s_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{-1}{n}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Also ist $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Aufgabe 19.[10 Punkte] Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, wobei $a_0 \in \mathbb{R}$ und

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}, \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

- (i) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert, falls $0 \leq a_0 \leq \frac{1}{2}$.
- (ii) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert, falls $a_0 > \frac{1}{2}$. (*Hinweis:* Zeigen Sie, dass $a_n \geq a_0 + n(a_0 - \frac{1}{2})^2$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.)
- (iii) Welches Konvergenzverhalten hat die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ für $a_0 < 0$?

Lösung. Wir setzen $r_n := \frac{1}{2} - a_n$. Dann gilt $r_{n+1} = \frac{1}{2} - a_{n+1} = \frac{1}{2} - a_n^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - r_n)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + r_n - r_n^2 = r_n - r_n^2$, und somit

$$r_{n+1} = r_n - r_n^2 \leq r_n \quad (1)$$

für alle $n \geq 0$ (mit einer strikten Ungleichung, falls $r_n \neq 0$).

- (i) (4 Punkte) Es gelte $0 \leq a_0 \leq \frac{1}{2}$. Aus $0 \leq r_0 \leq \frac{1}{2}$ folgt nun induktiv $0 \leq r_{n+1} \leq r_n \leq \frac{1}{2}$ für alle $n \geq 0$: Es gelte $0 \leq r_n \leq \frac{1}{2}$ für ein $n \geq 0$. Wegen $r_n \leq 1$ und weil r_n positiv ist, folgt $r_n^2 \leq r_n$. Also gilt $0 \leq r_n - r_n^2 \leq r_n$ woraus die Behauptung folgt.

Somit ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\frac{1}{2} - r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende, nach oben durch $\frac{1}{2}$ beschränkte Folge. Also konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwert im Intervall $[a_0, \frac{1}{2}]$.

- (ii) (4 Punkte) Es gelte nun $a_0 > \frac{1}{2}$, das heißt $r_0 < 0$. Wir behaupten mit Induktion nach n , dass

$$r_n \leq r_0 - nr_0^2, \quad (2)$$

für alle $n \geq 1$. Für $n = 1$ ist die Aussage klar mit (1). Es sei nun $n \geq 1$ so, dass $r_n \leq r_0 - nr_0^2 < r_0$ gilt. Weil $x \mapsto x^2$ auf $(-\infty, 0]$ monoton fallend ist, folgt $-r_n^2 < -r_0^2$. Also haben wir

$$r_{n+1} = r_n - r_n^2 < r_n - r_0^2 \stackrel{\text{IV}}{\leq} r_0 - nr_0^2 - r_0^2 = r_0 - (n+1)r_0^2.$$

Dies zeigt die Behauptung. Aus (2) folgt nun

$$a_n = \frac{1}{2} - r_n \geq \frac{1}{2} - r_0 + nr_0^2 = a_0 + nr_0^2.$$

Also divergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (iii) (2 Punkte) Wegen $a_1 = a_0^2 + \frac{1}{4} = (-a_0)^2 + \frac{1}{4}$ hat das Vorzeichen von a_0 keinen Einfluss auf die restlichen Folgenglieder.

Gilt also $-\frac{1}{2} \leq a_0 < 0$, so konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach (i). Falls aber $a_0 < -\frac{1}{2}$, so divergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach (ii).

Aufgabe 20. [10 Punkte] Es sei φ der goldene Schnitt, also die positive Lösung der quadratischen Gleichung $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. Die *Fibonacci-Folge* bezeichnet die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, die rekursiv gegeben ist durch $f_0 := f_1 := 1$ und $f_{n+1} := f_n + f_{n-1}$ für $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass

$$|f_{n+1} - \varphi f_n| \leq \frac{1}{\varphi^{n+1}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt und folgern Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi$. (*Hinweis:* Die Beziehungen $\varphi^{-1} = \varphi - 1$ und $\varphi^{-2} = 2 - \varphi$ könnten hilfreich sein.)

Lösung. Zunächst bemerken wir, dass $\varphi^{-1} = \varphi - 1$, was sich sofort aus $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ und Division durch φ ergibt. Weiterhin gilt $\varphi^{-2} = 2 - \varphi$, denn $\varphi^{-2} = (\varphi^{-1})^2 = (\varphi - 1)^2 = \varphi^2 - 2\varphi + 1 = 2 - \varphi$.

Wir beweisen nun die Behauptung durch Induktion nach n . Für $n = 0$ gilt $|1 - \varphi| = \frac{1}{\varphi}$. Für $n = 1$ gilt $|2 - \varphi| = \frac{1}{\varphi^2}$.

Es sei nun $n \geq 1$ so, dass $|f_n - \varphi f_{n-1}| \leq \frac{1}{\varphi^n}$. Wir rechnen nun

$$\begin{aligned} |f_{n+2} - \varphi f_{n+1}| &= |f_{n+1} + f_n - \varphi f_{n+1}| = |(1 - \varphi) \cdot f_{n+1} + f_n| \\ &= |(1 - \varphi) \cdot (f_n + f_{n-1}) + f_n| = |(2 - \varphi) \cdot f_n + (1 - \varphi)f_{n-1}| \\ &= \left| \frac{f_n}{\varphi^2} - \frac{f_{n-1}}{\varphi} \right| = \frac{1}{\varphi^2} \cdot |f_n - \varphi f_{n-1}| \\ &\stackrel{\text{IV}}{\leq} \frac{1}{\varphi^2} \cdot \frac{1}{\varphi^n} = \frac{1}{\varphi^{n+2}}. \end{aligned}$$

Dies beendet die Induktion.

Wir erhalten nun $\left| \frac{f_{n+1}}{f_n} - \varphi \right| \leq \frac{1}{f_n \cdot \varphi^{n+1}} \leq \frac{1}{\varphi^{n+1}} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, denn offenbar gilt $f_n \geq 1$ für alle n und $\varphi > 1$. Also konvergiert $\left(\frac{f_{n+1}}{f_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen φ .

Abgabe: Sonntag, 24.05.2026, 23:59 Uhr