Institut für Mathematik
der Universität Paderborn
Dr. J. Kuit und Dr. C. Heyer

SoSe 2026
Freitag, 22.05.2026
Blatt 6

# Übungen zur Analysis für Informatik

**Aufgabe 21.**[10 Punkte] Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Fibonacci-Folge; sie ist rekursiv gegeben durch $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_{n+2} := f_{n+1} + f_n$ für alle $n \geq 0$. Zu $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k}{2^k}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Es gilt $s_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} s_n = 2$;

(iii) $\sup\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 2$.

**Aufgabe 22.**[10 Punkte] Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+17}{n^3+2n^2+n+1}$;

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^4}$;

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2^{-k}}{k^2-3k-1}$;

(iv) $\sum_{k=52}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1)^k$;

(v) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\sqrt[k]{3} - 1)$;

(vi) $\sum_{n=3}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{3k+2}$;

(vii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{(k^2)}}{k!}$.

**Aufgabe 23.**[10 Punkte] Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren und bestimmen Sie den Grenzwert.

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(k+1)}$. (*Hinweis:* Es gilt $\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.)

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. (*Hinweis:* Zeigen Sie per Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\sum_{k=1}^{n} kz^{k-1} = \frac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 1$.)

**Aufgabe 24.**[10 Punkte] Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge. Zeigen Sie den *Verdichtungssatz von Cauchy*: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergent ist.

**Abgabe:** Sonntag, 31.05.2026, 23:59 Uhr