Institut für Mathematik
der Universität Paderborn
Dr. J. Kuit und Dr. C. Heyer

SoSe 2026
Freitag, 22.05.2026
Blatt 6

Übungen zur Analysis für Informatik

Aufgabe 21.[10 Punkte] Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Fibonacci-Folge; sie ist rekursiv gegeben durch $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_{n+2} := f_{n+1} + f_n$ für alle $n \geq 0$. Zu $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k}{2^k}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Es gilt $s_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} s_n = 2$;

(iii) $\sup\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 2$.

Lösung. Zunächst bemerken wir, dass

$$\begin{aligned} s_{n+2} &= \sum_{k=1}^{n+2} \frac{f_k}{2^k} = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n+2} \frac{f_{k-1} + f_{k-2}}{2^k} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=2}^{n+2} \frac{f_{k-1}}{2^{k-1}} + \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=2}^{n+2} \frac{f_{k-2}}{2^{k-2}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f_k}{2^k} + \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k}{2^k} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{s_{n+1}}{2} + \frac{s_n}{4} = \frac{1}{2} + \frac{s_{n+1}}{2} + \frac{s_n}{4}, \end{aligned}$$

wobei implizit $f_0 = 0$ verwendet wurde.

(i) (4 Punkte) Wir führen den Beweis durch Induktion nach n. Für $n = 1$ gilt $s_1 = \frac{1}{2} < 2$ und für $n = 2$ gilt $s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 2$. Für den Induktionsschritt sei nun $n \geq 1$ so, dass $s_{n+1}, s_n < 2$. Mithilfe der obigen Rechnung folgt nun

$$s_{n+2} = \frac{1}{2} + \frac{s_{n+1}}{2} + \frac{s_n}{4} < \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{4} = 2.$$

Dies beendet die Induktion und zeigt $s_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) (4 Punkte) Da alle Summanden von s_n positiv sind, folgt $s_n < s_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da also $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge ist, existiert der Grenzwert $s := \lim_{n\to\infty} s_n$. Dafür gilt

$$\begin{aligned} s &= \lim_{n\to\infty} s_{n+2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{s_{n+1}}{2} + \frac{s_n}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\lim_{n\to\infty} s_{n+1}}{2} + \frac{\lim_{n\to\infty} s_n}{4} = \frac{1}{2} + \frac{s}{2} + \frac{s}{4}. \end{aligned}$$

Durch Umstellen erhalten wir $s = 2$.

(iii) (2 Punkte) Da $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge ist, die gegen 2 konvergiert, folgt sofort, dass $\sup\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 2$.

Aufgabe 22.[10 Punkte] Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+17}{n^3+2n^2+n+1}$;

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^4}$;

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2^{-k}}{k^2-3k-1}$;

(iv) $\sum_{k=52}^{\infty} (\sqrt[k]{k}-1)^k$;

(v) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\sqrt[k]{3}-1)$;

(vi) $\sum_{n=3}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{3k+2}$;

(vii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{(k^2)}}{k!}$.

Lösung.

(i) (2 Punkte) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+17}{n^3+2n^2+n+1}$ konvergiert: Für $n \geq 17$ gilt $\frac{n+17}{n^3+2n^2+n+1} \leq \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}$. Laut Vorlesung konvergiert die Reihe $\sum_{n=17}^{\infty} \frac{2}{n^2} = 2 \cdot \sum_{n=17}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und ist eine Majorante für $\sum_{n=17}^{\infty} \frac{n+17}{n^3+2n^2+n+1}$. Daraus folgt aber, dass auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+17}{n^3+2n^2+n+1}$ konvergiert.

(ii) (1 Punkt) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^4}$ divergiert, denn $(\frac{3^k}{k^4})_{k\in\mathbb{N}}$ ist nach Vorlesung keine Nullfolge (sie divergiert gegen $+\infty$).

(iii) (1 Punkt) Es gilt $\frac{k+2^{-k}}{k^2-3k-1} \geq \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}$. Da die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, so divergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2^{-k}}{k^2-3k-1}$.

(iv) (2 Punkte) Die Reihe $\sum_{k=52}^{\infty} (\sqrt[k]{k}-1)^k$ konvergiert nach dem Wurzelkriterium, denn die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_k = \sqrt[k]{(\sqrt[k]{k}-1)^k} = \sqrt[k]{k}-1$ ist eine Nullfolge (und konvergiert insbesondere gegen einen Grenzwert < 1).

(v) (1 Punkt) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\sqrt[k]{3}-1)$ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, da $(\sqrt[k]{3}-1)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

(vi) (2 Punkte) Wegen

$$\frac{\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k}{3k+2}}{\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{3k+2}} = \frac{2n+2}{3n+5} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{3} < 1$$

konvergiert die Reihe $\sum_{n=3}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{3k+2}$ nach dem Quotientenkriterium.

(vii) (1 Punkt) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{(k^2)}}{k!}$ divergiert, denn die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k = \frac{k^{(k^2)}}{k!}$ ist wegen

$$a_k > \frac{k^k}{k!} = \frac{k \cdot k \cdots k}{k \cdot (k-1) \cdots 1} > 1$$

keine Nullfolge.

Aufgabe 23.[10 Punkte] Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren und bestimmen Sie den Grenzwert.

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(k+1)}$. (*Hinweis:* Es gilt $\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.)

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. (*Hinweis:* Zeigen Sie per Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\sum_{k=1}^{n} kz^{k-1} = \frac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 1$.)

Lösung.

(i) (3 Punkte) Wegen $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k\cdot(k+1)}$ gilt für alle $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1.\end{aligned}$$

Also gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(k+1)} = 1$.

(ii) (7 Punkte) Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 1$ fixiert. Wir zeigen zunächst die Identität

$$\sum_{k=1}^{n} kz^{k-1} = \frac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2} \tag{1}$$

durch Induktion nach n. Für $n = 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{1} kz^{k-1} = 1 = \frac{1-2z+z^2}{(1-z)^2}.$$

Es sei nun $n \geq 1$ so, dass die Identität (1) gilt. Wir rechnen nun

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} kz^{k-1} &= (n+1)z^n + \sum_{k=1}^{n} kz^{k-1} \\ &\overset{\text{IV}}{=} (n+1)z^n + \frac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2} \\ &= \frac{(n+1)z^n(1-z)^2 + 1 - (n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2} \\ &= \frac{-(n+1)z^n \cdot 2z + (n+1)z^n \cdot z^2 + 1 + nz^{n+1}}{(1-z)^2} \\ &= \frac{-2nz^{n+1} - 2z^{n+1} + (n+1)z^{n+2} + 1 + nz^{n+1}}{(1-z)^2} \\ &= \frac{1-(n+2)z^{n+1} + (n+1)z^{n+2}}{(1-z)^2}.\end{aligned}$$

Dies beendet die Induktion.

Wir nehmen nun zusätzlich $|z| < 1$ an. Wegen $|z| < 1$ gilt $\lim_{n\to\infty}(n+1)z^n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} nz^{n+1} = 0$ nach Vorlesung. Aus (1) schließen wir nun

$$\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} kz^{k-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Aufgabe 24.[10 Punkte] Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge. Zeigen Sie den *Verdichtungssatz von Cauchy*: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergent ist.

Lösung. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist; insbesondere gilt $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der andere Fall ergibt sich dann aus dem ersten durch Anwenden auf $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Für jedes $2^{n-1} < k \leq 2^n$ gilt $a_{2^{n-1}} \geq a_k \geq a_{2^n}$. Damit rechnen wir einerseits

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \geq \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} a_k \geq \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} a_{2^n} = \sum_{n=1}^{N} 2^{n-1} a_{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{N} 2^n a_{2^n},$$

und andererseits

$$\sum_{n=3}^{N} a_n = \sum_{n=2}^{N} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} a_k \leq \sum_{n=2}^{N} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} a_{2^{n-1}} = \sum_{n=2}^{N} 2^{n-1} a_{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{N} 2^n a_{2^n},$$

für alle $N \in \mathbb{N}$. Insgesamt gilt also

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{N} 2^n a_{2^n} \leq \sum_{n=1}^{N} a_n \leq \sum_{n=1}^{N} 2^n a_{2^n} + a_1 + a_2.$$

Durch zweimaliges Anwenden des Majorantenkriteriums folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert.

Abgabe: Sonntag, 31.05.2026, 23:59 Uhr