Institut für Mathematik
der Universität Paderborn
Dr. J. Kuit und Dr. C. Heyer

SoSe 2026
Freitag, 29.05.2026
Blatt 7

Übungen zur Analysis für Informatik

Aufgabe 25.[10 Punkte] Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

(i) $\sum_{n=k+1}^{\infty} \binom{n}{k} z^n$ für fixiertes $k \in \mathbb{N}$;

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{3k+1} \Big) z^n$;

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n+3} \cdot z^n$;

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{n^3+2+(-1)^n}{n^3+3} \Big)^n z^n$;

(v) $\sum_{k=0}^{\infty} k! z^k$.

Aufgabe 26.[10 Punkte] Für $s, z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ sei $B_s(z)$ die Binomialreihe

$$B_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} z^k,$$

wobei $\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-k+1)}{k!}$, aus Präsenzaufgabe 21.

(i) Zeigen Sie, dass für alle $s \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ die Identität

$$B_s(x) = (1+x)^s$$

gilt. (*Hinweis:* Verwenden Sie Präsenzaufgabe 21(ii) und 21(iv).)

(ii) Berechnen Sie die ersten 5 Summanden der Potenzreihe für $\sqrt{1+x} = B_{1/2}(x)$.

Aufgabe 27.[10 Punkte] Für $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$ versteht man unter einem b-adischen Bruch eine Reihe der Gestalt

$$\pm \sum_{n=-\infty}^{k} a_n b^n =: a_k a_{k-1} \ldots a_0 . a_{-1} a_{-2} \ldots\ ;$$

hierbei ist $k \geq 0$ und die a_n sind ganze Zahlen mit $0 \leq a_n < b$.

(i) Zeigen Sie: Jeder b-adische Bruch stellt eine Cauchy-Folge dar und konvergiert somit gegen eine reelle Zahl.

(ii) Zeigen Sie: Jede reelle Zahl lässt sich in einen b-adischen Bruch entwickeln, das heißt, zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es für jedes $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq k$ ein $a_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ mit $x = \pm \sum_{n=-\infty}^{k} a_n b^n$.

(iii) Entwickeln Sie $x = \frac{1}{7}$ in einen b-adischen Bruch mit $b = 2$.

Aufgabe 28.[10 Punkte] Wir betrachten die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ und ein beliebiges $s \in \mathbb{R}$. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Umordnung von $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ zu konstruieren, die gegen s konvergiert.

(i) Zeigen Sie, dass die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$ divergieren.

(ii) Konstruieren Sie eine Bijektion $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ derart, dass $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{\sigma(k)} \frac{1}{\sigma(k)} = s$.

(*Hinweis:* Definieren Sie $\sigma(n)$ induktiv als die kleinste gerade oder ungerade Zahl in der Menge $\mathbb{N} \backslash \sigma(\{1, \dots, n-1\})$, je nachdem ob die Summe $\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{\sigma(k)} \frac{1}{\sigma(k)}$ kleinergleich oder größer als s ist. (Man beachte, dass $\sum_{k=1}^{0} (-1)^{\sigma(k)} \frac{1}{\sigma(k)} = 0$.) Es bleibt zu zeigen, dass σ bijektiv ist und die so definierte Umordnung gegen s konvergiert.)

Abgabe: Sonntag, 07.06.2026, 23:59 Uhr