Institut für Mathematik
der Universität Paderborn
Dr. J. Kuit und Dr. C. Heyer

SoSe 2026
Freitag, 29.05.2026
Blatt 7

Übungen zur Analysis für Informatik

Aufgabe 25.[10 Punkte] Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

(i) $\displaystyle\sum_{n=k+1}^{\infty} \binom{n}{k} z^n$ für fixiertes $k \in \mathbb{N}$;

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{3k+1}\Big) z^n$;

(iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n+3} \cdot z^n$;

(iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{n^3+2+(-1)^n}{n^3+3}\Big)^n z^n$;

(v) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k! z^k$.

Lösung.

(i) (2 Punkte) Es gilt

$$\frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{(n+1)! \cdot k! \cdot (n-k)!}{n! \cdot k! \cdot (n+1-k)!} = \frac{n+1}{n+1-k} = 1 + \frac{k}{n+1-k} \to 1$$

für $n \to \infty$. Nach dem Quotientenkriterium hat $\sum_{n=k+1}^{\infty} \binom{n}{k} z^n$ den Konvergenzradius 1.

(ii) (2 Punkte) Für $a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{3k+1}$ gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+1)}{3(n+1)+1} = \frac{2n+2}{3n+4} = \frac{2+\frac{2}{n}}{3+\frac{4}{n}} \to \frac{2}{3}$$

für $n \to \infty$. Nach dem Quotientenkriterium hat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ den Konvergenzradius $\frac{3}{2}$.

(iii) (2 Punkte) Es gilt

$$\sqrt[n]{\frac{2^{n^2}}{n+3}} = \frac{2^n}{\sqrt[n]{n+3}} \to \infty$$

für $n \to \infty$ (da $(2^n)_n$ gegen ∞ divergiert und $(\sqrt[n]{n+3})_n$ gegen 1 konvergiert und insbesondere beschränkt ist). Nach dem Wurzelkriterium hat also $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n+3} z^n$ den Konvergenzradius Null.

(iv) (2 Punkte) Es gilt

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n^3+2+(-1)^n}{n^3+3}\right)^n} = \frac{n^3+2+(-1)^n}{n^3+3} = \frac{1+\frac{2}{n^3}+\frac{(-1)^n}{n^3}}{1+\frac{3}{n^3}} \to 1$$

für $n \to \infty$. Nach dem Wurzelkriterium hat $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^3+2+(-1)^n}{n^3+3}\right)^n z^n$ den Konvergenzradius 1.

(v) (2 Punkte) Es gilt

$$\frac{(k+1)!}{k!} = k+1 \to \infty$$

für $k \to \infty$. Nach dem Quotientenkriterium hat $\sum_{k=0}^{\infty} k! z^k$ den Konvergenzradius Null.

Aufgabe 26.[10 Punkte] Für $s, z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ sei $B_s(z)$ die Binomialreihe

$$B_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} z^k,$$

wobei $\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-k+1)}{k!}$, aus Präsenzaufgabe 21.

(i) Zeigen Sie, dass für alle $s \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ die Identität

$$B_s(x) = (1+x)^s$$

gilt. (*Hinweis:* Verwenden Sie Präsenzaufgabe 21(ii) und 21(iv).)

(ii) Berechnen Sie die ersten 5 Summanden der Potenzreihe für $\sqrt{1+x} = B_{1/2}(x)$.

Lösung.

(i) (5 Punkte) Aus der Präsenzaufgabe 21 wissen wir

$$B_{s+t}(z) = B_s(z) \cdot B_t(z) \qquad \text{und} \qquad B_0(z) = 1$$

für alle $s, t \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Insbesondere gilt $B_{-s}(z) = B_s(z)^{-1}$ und $B_s(z) = B_{n \cdot s/n}(z) = (B_{s/n}(z))^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $B_{s/n}(x) > 0$ für alle $s, x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ (Präsenzaufgabe 21(iv)) erhalten wir daraus $B_{s/n}(x) = \sqrt[n]{B_s(x)}$.

Es seien nun $s \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Falls $s \in \mathbb{N}_0$, so gilt $B_s(x) = \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} x^k = (1+x)^s$ nach dem binomischen Lehrsatz. Falls $s \in \mathbb{Z}$ mit $s < 0$, so gilt $B_s(x) = B_{-s}(x)^{-1} = \left((1+x)^{-s}\right)^{-1} = (1+x)^s$. Für allgemeines s schreiben wir $s = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$B_s(x) = \sqrt[q]{B_p(x)} = \sqrt[q]{(1+x)^p} = (1+x)^{\frac{p}{q}} = (1+x)^s.$$

(ii) (5 Punkte) Es gilt $\sqrt{1+x} = B_{1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} x^k$. Allgemein folgt sofort aus der Definition des Binomialkoeffizienten, dass $\binom{s}{k} = \binom{s}{k-1} \cdot \frac{s-k+1}{k}$. Damit sind die ersten 5 Summanden gegeben durch

$$\begin{aligned}
\binom{1/2}{0} x^0 &= 1, \\
\binom{1/2}{1} x^1 &= \frac{1}{2} \cdot x, \\
\binom{1/2}{2} x^2 &= \binom{1/2}{1} \cdot \frac{\frac{1}{2}-1}{2} \cdot x^2 = -\frac{1}{8} \cdot x^2, \\
\binom{1/2}{3} x^3 &= \binom{1/2}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}-2}{3} \cdot x^3 = \frac{1}{16} \cdot x^3, \\
\binom{1/2}{4} x^4 &= \binom{1/2}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2}-3}{4} = -\frac{5}{128} \cdot x^4.
\end{aligned}$$

Aufgabe 27.[10 Punkte] Für $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$ versteht man unter einem b-adischen Bruch eine Reihe der Gestalt

$$\pm \sum_{n=-\infty}^{k} a_n b^n =: a_k a_{k-1} \ldots a_0 . a_{-1} a_{-2} \ldots \, ;$$

hierbei ist $k \geq 0$ und die a_n sind ganze Zahlen mit $0 \leq a_n < b$.

(i) Zeigen Sie: Jeder b-adische Bruch stellt eine Cauchy-Folge dar und konvergiert somit gegen eine reelle Zahl.

(ii) Zeigen Sie: Jede reelle Zahl lässt sich in einen b-adischen Bruch entwickeln, das heißt, zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es für jedes $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq k$ ein $a_n \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ mit $x = \pm \sum_{n=-\infty}^{k} a_n b^n$.

(iii) Entwickeln Sie $x = \frac{1}{7}$ in einen b-adischen Bruch mit $b = 2$.

Lösung.

(i) (4 Punkte) Es sei $\sum_{n=-\infty}^{k} a_n b^n$ ein b-adischer Bruch. Für alle $M > N \in \mathbb{N}$ gilt zunächst

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N+1}^{M} a_{-n} b^{-n} \leq \sum_{n=N+1}^{M} (b-1) b^{-n} &= \sum_{n=N+1}^{M} b^{-(n-1)} - \sum_{n=N+1}^{M} b^{-n} \\
&= \sum_{n=N}^{M-1} b^{-n} - \sum_{n=N+1}^{M} b^{-n} = b^{-N} - b^{-M} \\
&\leq b^{-N}.
\end{aligned}$$

Wegen $b^n \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt $b^{-n} = \frac{1}{b^n} \to 0$ für $n \to \infty$. Ist also $\varepsilon > 0$ beliebig, so existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $b^{-N} < \varepsilon$. Für alle $m \geq n > N$ gilt dann

$$\sum_{n=N+1}^{m} a_{-n} b^{-n} \leq b^{-N} < \varepsilon.$$

Dies zeigt, dass $\left(\sum_{n=-i}^{k} a_n b^n\right)_{i \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{n=-k}^{i} a_{-n} b^{-n}\right)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, konvergiert diese Cauchy-Folge gegen eine reelle Zahl

$$a_k a_{k-1} \ldots a_0 . a_{-1} a_{-2} \ldots \in \mathbb{R}.$$

(ii) (4 Punkte) Es sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Bis auf Ändern des Vorzeichens (was lediglich das Vorzeichen der b-adischen Entwicklung bewirkt) können wir annehmen, dass x positiv ist. Es sei $k \in \mathbb{N}$ so, dass $b^k \leq x < b^{k+1}$. Es sei weiter $a_k \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ so, dass $a_k b^k \leq x < (a_k+1)b^k$. Es seien nun $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq k$ und $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_k$ bereits konstruiert mit der Eigenschaft, dass

$$0 \leq x - \sum_{i=n}^{k} a_i b^i < b^{n+1}. \tag{1}$$

Wähle nun $a_{n-1} \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ so, dass $a_{n-1}b^{n-1} \leq x - \sum_{i=n}^{k} a_i b^i < (a_{n-1}+1)b^{n-1}$. Dann gilt auch

$$0 \leq x - \sum_{i=n-1}^{k} a_i b^i = x - \sum_{i=n}^{k} a_i b^i - a_{n-1}b^{n-1} < b^n.$$

Induktiv erhalten wir somit einen b-adischen Bruch $\sum_{n=-\infty}^{k} a_n b^n$. Wegen $\lim_{n\to-\infty} b^{n+1} = 0$ folgt aus dem Einschnürungsprinzip aus (1), dass $\lim_{n\to-\infty}(x - \sum_{i=n}^{k} a_i b^i) = 0$. Aber dies bedeutet, dass $x = \sum_{i=-\infty}^{k} a_i b^i$ wie gewünscht.

(iii) (2 Punkte) Es sei nun $x = \frac{1}{7}$ und $b = 2$. Es gilt

$$\frac{1}{7} = 2^{-3} \cdot \frac{1}{1-2^{-3}} = 2^{-3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-3k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-3(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-3k}.$$

Aufgabe 28.[10 Punkte] Wir betrachten die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}$ und ein beliebiges $s \in \mathbb{R}$. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Umordnung von $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}$ zu konstruieren, die gegen s konvergiert.

(i) Zeigen Sie, dass die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$ divergieren.

(ii) Konstruieren Sie eine Bijektion $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ derart, dass $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{\sigma(k)} \frac{1}{\sigma(k)} = s$.

(*Hinweis:* Definieren Sie $\sigma(n)$ induktiv als die kleinste gerade oder ungerade Zahl in der Menge $\mathbb{N}\setminus\sigma(\{1, \ldots, n-1\})$, je nachdem ob die Summe $\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{\sigma(k)}\frac{1}{\sigma(k)}$ kleinergleich oder größer als s ist. (Man beachte, dass $\sum_{k=1}^{0}(-1)^{\sigma(k)}\frac{1}{\sigma(k)} = 0$.) Es bleibt zu zeigen, dass σ bijektiv ist und die so definierte Umordnung gegen s konvergiert.)

Lösung.

(i) (4 Punkte) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, weil die harmonische Reihe divergiert. Wegen $\frac{1}{2k+1} \geq \frac{1}{2k+2}$ gilt $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k+1} \geq \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k+2} = \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{2k}$, für alle $N \in \mathbb{N}$. Mit $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2k}$ divergiert also auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$.

(ii) (6 Punkte) Dem Hinweis folgend definieren wir $\sigma(n)$ induktiv als die kleinste gerade oder ungerade Zahl in der Menge $\mathbb{N} \setminus \sigma(\{1, \ldots, n-1\})$, je nachdem ob die Summe $\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{\sigma(k)}\frac{1}{\sigma(k)}$ kleiner-gleich oder größer als s ist. Wegen $\sum_{k=1}^{0}(-1)^{\sigma(k)}\frac{1}{\sigma(k)} = 0$ ist diese Definition auch schon für $n = 1$ sinnvoll. Wir überlegen uns zunächst, warum $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv ist. Wegen $\sigma(n) \notin \sigma(\{1, \ldots, n-1\})$ ist σ offenbar injektiv. Für einen Widerspruch nehmen wir an, dass σ nicht surjektiv ist. Es sei $i \in \mathbb{N}\setminus\sigma(\mathbb{N})$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass i ungerade ist.

Der Fall wo i gerade ist, wird analog argumentiert. In diesem Fall gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\sigma(n)$ gerade ist, für alle $n \geq N$. Es sei $\sigma(N) = 2M$. Dann gilt

$$\sum_{k=M}^{n-N+M} \frac{1}{2k} \leq s - \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^{\sigma(k)} \frac{1}{\sigma(k)}$$

für alle $n \geq N$. Da aber $\sum_{k=M}^{\infty} \frac{1}{2k}$ nach (i) divergiert, erhalten wir einen Widerspruch. Also war die Annahme falsch und σ ist surjektiv.

Schließlich zeigen wir, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\sigma(k)} \frac{1}{\sigma(k)}$ gegen s konvergiert. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Die Menge $\sigma^{-1}\big(\big\{n \in \mathbb{N} \,\big|\, \frac{1}{n} \geq \varepsilon\big\}\big)$ ist endlich. Also existiert $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\frac{1}{\sigma(n)} < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Wähle zudem ein $M > N$ mit $a_{M-1} \leq s$ und $a_M > s$. Wir zeigen nun durch Induktion nach $n \geq M$, dass $|a_n - s| < \varepsilon$. Für $n = M$ gilt

$$0 \leq a_M - s = \frac{(-1)^{\sigma(M)}}{\sigma(M)} + a_{M-1} - s \leq \frac{(-1)^{\sigma(M)}}{\sigma(M)} < \varepsilon$$

und somit $|a_M - s| < \varepsilon$. Es sei nun $n \geq M$ so, dass $|a_n - s| < \varepsilon$. Nach Konstruktion haben $\frac{(-1)^{\sigma(n+1)}}{\sigma(n+1)}$ und $a_n - s$ verschiedene Vorzeichen. Damit erhalten wir

$$|a_{n+1} - s| = \left| \frac{(-1)^{\sigma(n+1)}}{\sigma(n+1)} + a_n - s \right| \leq \max\left\{ \frac{1}{\sigma(n+1)}, |a_n - s| \right\} < \varepsilon.$$

Dies beendet die Induktion und zeigt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen s konvergiert.

Abgabe: Sonntag, 07.06.2026, 23:59 Uhr