Institut für Mathematik
der Universität Paderborn
Dr. J. Kuit und Dr. C. Heyer

SoSe 2026
Freitag, 05.06.2026
Blatt 8

Übungen zur Analysis für Informatik

Aufgabe 29.[10 Punkte] Welche der angegebenen Folgen besitzen eine konvergente Teilfolge und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sqrt[n]{n!}$. (*Hinweis:* Zeigen Sie, dass $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, indem Sie $(n!)^2 \geq n^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ beweisen.)

(ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \dfrac{n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi n} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{n}}}{2n+1}$.

(iii) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \begin{cases} n!, & \text{falls } n = 2^m \text{ für ein } m \in \mathbb{N}_0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

(iv) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$.

Aufgabe 30.[10 Punkte]

(i) Berechnen Sie die Eulerdarstellungen der komplexen Zahlen $2 - 2\mathrm{i}$ und $\frac{\mathrm{i}}{3}$ und die des Produkts $(2 - 2\mathrm{i}) \cdot \frac{\mathrm{i}}{3}$.

(ii) Geben Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^{13} = 8192$ in deren Eulerdarstellungen an.

(iii) Zeichnen Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 125\}$.

Aufgabe 31.[10 Punkte] Zeigen Sie die Identität

$$\cos(\phi)^4 = \frac{\cos(4\phi)}{8} + \frac{\cos(2\phi)}{2} + \frac{3}{8}$$

für alle $\phi \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 32.[10 Punkte] Es sei $z \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie die Summenformeln für

$$1 + \cos(z) + \cos(2z) + \cdots + \cos(nz) \quad \text{und} \quad \sin(z) + \sin(2z) + \cdots + \sin(nz).$$

(*Hinweis:* Die Identität $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)$ und die geometrische Summe könnten hilfreich sein.)

Abgabe: Sonntag, 14.06.2026, 23:59 Uhr