Institut für Mathematik
der Universität Paderborn
Dr. J. Kuit und Dr. C. Heyer

SoSe 2026
Freitag, 05.06.2026
Blatt 8

Übungen zur Analysis für Informatik

Aufgabe 29.[10 Punkte] Welche der angegebenen Folgen besitzen eine konvergente Teilfolge und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sqrt[n]{n!}$. (*Hinweis:* Zeigen Sie, dass $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, indem Sie $(n!)^2 \geq n^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ beweisen.)

(ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \dfrac{n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi n} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{n}}}{2n+1}$.

(iii) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \begin{cases} n!, & \text{falls } n = 2^m \text{ für ein } m \in \mathbb{N}_0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

(iv) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$.

Lösung.

(i) (4 Punkte) Die Folge $(\sqrt[n]{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt keine konvergente Teilfolge. Dafür genügt es zu zeigen, dass sie monoton und unbeschränkt ist. Dafür genügt es zu zeigen, dass $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, da $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ selbst monoton und unbeschränkt ist.

Für jedes $1 \leq i \leq n$ gilt $(i-1)\cdot n \geq (i-1)\cdot i$. Durch umstellen erhalten wir daraus

$$i \cdot (n+1-i) \geq n,$$

für alle $1 \leq i \leq n$. Es folgt

$$(n!)^2 = \prod_{i=1}^{n} i\cdot(n+1-i) \geq \prod_{i=1}^{n} n = n^n$$

und daraus schließlich $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) (3 Punkte) Wegen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi 2n} = 1$ und $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{2n}}| = 1$ gilt

$$b_{2n} = \frac{1}{2+\frac{1}{2n}} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{2n}}}{4n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2},$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $(b_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(iii) (2 Punkte) Wegen $3^k \neq 2^m$ für alle k, m gilt $c_{3^k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $(c_{3^k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(iv) (1 Punkt) Es gilt $\frac{1}{\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2n}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$, wobei die äußeren Terme gegen 1 konvergieren. Also konvergiert auch $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1 nach dem Einschnürungsprinzip.

Aufgabe 30.[10 Punkte]

(i) Berechnen Sie die Eulerdarstellungen der komplexen Zahlen $2-2\mathrm{i}$ und $\frac{\mathrm{i}}{3}$ und die des Produkts $(2-2\mathrm{i})\cdot\frac{\mathrm{i}}{3}$.

(ii) Geben Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^{13}=8192$ in deren Eulerdarstellungen an.

(iii) Zeichnen Sie die Menge $\{z\in\mathbb{C}\,|\,z^3=125\}$.

Lösung.

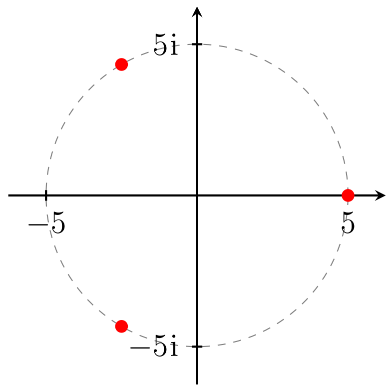
(i) (4 Punkte) Es gilt $|2-2\mathrm{i}|=2\sqrt{2}$ und somit $2-2\mathrm{i}=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{7\pi\mathrm{i}/4}$. Es gilt $|\frac{\mathrm{i}}{3}|=\frac{1}{3}$ und somit $\frac{\mathrm{i}}{3}=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/2}$. Für das Produkt gilt nun

$$(2-2\mathrm{i})\cdot\frac{\mathrm{i}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\mathrm{e}^{7\pi\mathrm{i}/4+\pi\mathrm{i}/2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/4}.$$

(ii) (3 Punkte) Wegen $8192=2^{13}$ ist die Menge der Lösungen von $z^{13}=8192$ gegeben durch

$$\left\{2\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/13}\,\middle|\,k=0,1,\dots,12\right\}.$$

(iii) (3 Punkte) Die Menge $\{z\in\mathbb{C}\,|\,z^3=125\}$ ist gegeben durch



Aufgabe 31.[10 Punkte] Zeigen Sie die Identität

$$\cos(\phi)^4=\frac{\cos(4\phi)}{8}+\frac{\cos(2\phi)}{2}+\frac{3}{8}$$

für alle $\phi\in\mathbb{R}$.

Lösung. Mit der binomischen Summenformel gilt

$$\begin{aligned}\cos(\phi)^4&=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}}{2}\right)^4\\&=\frac{1}{2^4}\cdot\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\phi}+4\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\phi-\mathrm{i}\phi}+6\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\phi-2\mathrm{i}\phi}+4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi-3\mathrm{i}\phi}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\phi}\right)\\&=\frac{1}{16}\cdot\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\phi}+4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\phi}+6+4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\phi}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\phi}\right)\\&=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\phi}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\phi}}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\phi}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\phi}}{2}\right)+\frac{3}{8}\\&=\frac{\cos(4\phi)}{8}+\frac{\cos(2\phi)}{2}+\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

Aufgabe 32.[10 Punkte] Es sei $z \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie die Summenformeln für

$$1 + \cos(z) + \cos(2z) + \cdots + \cos(nz) \quad \text{und} \quad \sin(z) + \sin(2z) + \cdots + \sin(nz).$$

(*Hinweis:* Die Identität $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)$ und die geometrische Summe könnten hilfreich sein.)

Lösung. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \cos(kz) + \mathrm{i}\sum_{k=0}^{n} \sin(kz) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} = \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}z})^k \\
&= \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z})^{n+1} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - 1} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)z} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - 1} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)z/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z/2}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)z/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)z/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z/2}} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}nz/2} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)z/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)z/2}}{2\mathrm{i}} \cdot \frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z/2}} \\
&= \big(\cos(nz/2) + \mathrm{i}\sin(nz/2)\big) \cdot \frac{\sin((n+1)z/2)}{\sin(z/2)}.
\end{aligned}$$

Durch Separieren nach dem geraden und ungeraden Anteil erhalten wir die Formeln

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kz) = \cos(nz/2) \cdot \frac{\sin((n+1)z/2)}{\sin(z/2)}$$

und

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kz) = \sin(nz/2) \cdot \frac{\sin((n+1)z/2)}{\sin(z/2)}.$$

Abgabe: Sonntag, 14.06.2026, 23:59 Uhr