

Übungen zur Analysis für Informatik

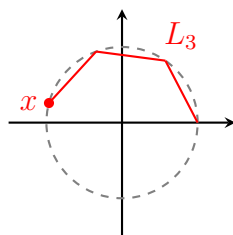
Aufgabe 33. [10 Punkte]

- (i) Zeigen Sie $1 + \tan(\alpha)^2 = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\cos(\alpha) \neq 0$.
- (ii) Es sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Wir setzen $u := \tan(\frac{\alpha}{2})$. Zeigen Sie die Identitäten

$$\sin(\alpha) = \frac{2u}{1+u^2} \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

indem Sie die Definitionen von Sinus und Kosinus aus der Vorlesung verwenden.
(*Hinweis:* Sie dürfen die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus verwenden.)

Aufgabe 34. [10 Punkte] Es sei $x \in \mathbb{R}$ fixiert. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne L_n die Länge des Streckenzuges, der die Punkte $e^{ikx/n}$ für $k = 0, 1, \dots, n$ verbindet (wie im Bild veranschaulicht).



- (i) Zeigen Sie $L_n = 2n \left| \sin\left(\frac{x}{2n}\right) \right|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) Zeigen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = |x|$. (*Hinweis:* Aufgabe 36(ii).)

Was bedeutet (ii) geometrisch für die Lage von e^{ix} ? Was bedeutet $e^{2\pi i} = 1$ geometrisch?

Aufgabe 35. [10 Punkte] Die Funktionen Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus sind definiert durch

$$\begin{aligned} \sinh: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & \sinh(x) &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \cosh: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & \cosh(x) &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

- (i) Zeigen Sie, dass \sin , \cos , \sinh und \cosh stetig sind.
- (ii) Ermitteln Sie die Potenzreihendarstellungen der Funktionen \sinh und \cosh .
- (iii) Zeigen Sie, dass \sinh bijektiv ist. (*Hinweis:* Verwenden Sie geeignete Substitutionen um die Umkehrfunktion von \sinh zu finden.)

(iv) Beweisen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Formeln

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

und

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

(v) Skizzieren Sie die Graphen von \sinh und \cosh .

Aufgabe 36.[10 Punkte] Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen stetig in $x = 0$ sind:

$$(i) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0; \end{cases}$$

$$(ii) g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 1, & \text{falls } x = 0; \end{cases}$$

(*Hinweis:* Die Potenzreihenentwicklung von $\sin(x)$ könnte hilfreich sein.)

$$(iii) h: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{C}, h(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} \left(\frac{1}{x+1} - 1 \right)^2, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Abgabe: Sonntag, 21.06.2026, 23:59 Uhr