

## Übungen zur Analysis für Informatik

### Aufgabe 33.[10 Punkte]

- (i) Zeigen Sie  $1 + \tan(\alpha)^2 = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$  für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  mit  $\cos(\alpha) \neq 0$ .
- (ii) Es sei  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Wir setzen  $u := \tan(\frac{\alpha}{2})$ . Zeigen Sie die Identitäten

$$\sin(\alpha) = \frac{2u}{1+u^2} \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

indem Sie die Definitionen von Sinus und Kosinus aus der Vorlesung verwenden.  
(*Hinweis:* Sie dürfen die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus verwenden.)

*Lösung.*

- (i) (4 Punkte) Es sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  mit  $\cos(\alpha) \neq 0$ . Nach Definition gilt  $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ . Daraus folgt

$$1 + \tan(\alpha)^2 = \frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} + \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{1}{\cos^2(\alpha)},$$

wobei die letzte Gleichung nach Aufgabe 35(iv) gilt.

- (ii) (6 Punkte) Zunächst folgt aus den Additionstheoremen, dass

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \quad \text{und} \quad \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x),$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Mit  $u = \tan(\frac{x}{2})$  und (i) erhalten wir

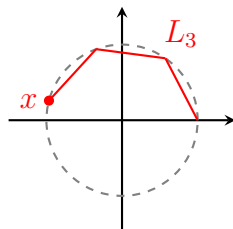
$$\frac{2u}{1+u^2} = \cos^2(\alpha/2) \cdot 2 \cdot \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} = 2 \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2) = \sin(\alpha),$$

wobei wir für die letzte Gleichheit das Additionstheorem für den Sinus mit  $x = \frac{\alpha}{2}$  angewendet haben. Genauso rechnen wir mit (i):

$$\frac{1-u^2}{1+u^2} = \cos^2(\alpha/2) \cdot \left(1 - \frac{\sin^2(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)}\right) = \cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2) = \cos(\alpha),$$

wobei wir für die letzte Gleichung das Additionstheorem für den Kosinus für  $x = \frac{\alpha}{2}$  verwendet haben.

**Aufgabe 34.**[10 Punkte] Es sei  $x \in \mathbb{R}$  fixiert. Für  $n \in \mathbb{N}$  bezeichne  $L_n$  die Länge des Streckenzuges, der die Punkte  $e^{ikx/n}$  für  $k = 0, 1, \dots, n$  verbindet (wie im Bild veranschaulicht).



- (i) Zeigen Sie  $L_n = 2n \left| \sin\left(\frac{x}{2n}\right) \right|$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .  
(ii) Zeigen Sie  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = |x|$ . (*Hinweis:* Aufgabe 36(ii).)

Was bedeutet (ii) geometrisch für die Lage von  $e^{ix}$ ? Was bedeutet  $e^{2\pi i} = 1$  geometrisch?

*Lösung.*

- (i) (4 Punkte) Für jedes  $k \in \{1, \dots, n\}$  rechnen wir

$$\left| e^{ikx/n} - e^{i(k-1)x/n} \right| = 2 \underbrace{\left| e^{i(k-\frac{1}{2})x/n} \right|}_{=1} \cdot \left| \frac{e^{ix/2n} - e^{-ix/2n}}{2i} \right| = 2 \left| \sin(x/2n) \right|.$$

Somit gilt  $L_n = \sum_{k=1}^n \left| e^{ikx/n} - e^{i(k-1)x/n} \right| = \sum_{k=1}^n 2 \left| \sin(x/2n) \right| = 2n \left| \sin(x/2n) \right|$ .

- (ii) (4 Punkte) Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{2n} = 0$  gilt nach Aufgabe 36(ii), dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(x/2n)}{x/2n} = 1$ . Insbesondere gilt  $\frac{\sin(x/2n)}{x/2n} = \left| \frac{\sin(x/2n)}{x/2n} \right|$  für große  $n$  und folglich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \cdot \left| \frac{\sin(x/2n)}{x/2n} \right| = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(x/2n)}{x/2n} = |x|.$$

(2 Punkte): (ii) bedeutet, dass die Kurve  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{ixt}$  auf dem Einheitskreis die Länge  $|x|$  hat. Wegen  $e^{2\pi i} = 1$  schließen wir, dass der Einheitskreis den Umfang  $2\pi$  besitzt.

**Aufgabe 35.**[10 Punkte] Die Funktionen Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus sind definiert durch

$$\begin{aligned} \sinh: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & \sinh(x) &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \cosh: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & \cosh(x) &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

- (i) Zeigen Sie, dass sin, cos, sinh und cosh stetig sind.  
(ii) Ermitteln Sie die Potenzreihendarstellungen der Funktionen sinh und cosh.  
(iii) Zeigen Sie, dass sinh bijektiv ist. (*Hinweis:* Verwenden Sie geeignete Substitutionen um die Umkehrfunktion von sinh zu finden.)  
(iv) Beweisen Sie für  $x \in \mathbb{R}$  die Formeln

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

und

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

- (v) Skizzieren Sie die Graphen von sinh und cosh.

Lösung.

(i) (1 Punkt) Aus der Vorlesung wissen wir, dass  $x \mapsto e^x$  stetig ist. Somit sind  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\sinh$  und  $\cosh$  als Kompositionen von stetigen Funktionen wieder stetig.

(ii) (2 Punkte) Es gilt

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k - (-1)^k x^k}{k!} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\end{aligned}$$

und analog

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k + (-1)^k x^k}{k!} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

(iii) (4 Punkte) Wir setzen  $u := e^x$  und  $y := \sinh(x)$ , sodass also  $y = \frac{u-u^{-1}}{2}$  gilt. Äquivalent ist  $u$  eine Nullstelle des quadratischen Polynoms  $u^2 - 2yu - 1 = 0$ , und dafür gilt nach der Mitternachtsformel:

$$u = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Wegen  $u = e^x > 0$  und  $|y| < \sqrt{y^2 + 1}$  gilt folglich  $e^x = u = y + \sqrt{y^2 + 1}$ . Da  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  bijektiv mit Umkehrfunktion  $\ln$  ist, erhalten wir

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

Für die Funktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y \mapsto \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$  gilt nach Konstruktion  $g(\sinh(x)) = x$ . Umgekehrt sei  $y \in \mathbb{R}$ . Wir setzen  $u := y + \sqrt{y^2 + 1}$ . Nach der obigen Rechnung gilt dann  $\frac{u-u^{-1}}{2} = y$  und somit

$$\sinh(g(y)) = \frac{e^{\ln(u)} - e^{-\ln(u)}}{2} = \frac{u - u^{-1}}{2} = y.$$

Dies zeigt, dass  $g$  eine Umkehrfunktion von  $\sinh$  ist. Also ist  $\sinh$  bijektiv.

(iv) (2 Punkte) Es gilt

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = |\cos(x) + i \sin(x)|^2 = |e^{ix}|^2 = 1$$

und

$$\begin{aligned}\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \frac{1}{4} \cdot ((e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2) \\ &= \frac{1}{4} \cdot (e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = 1.\end{aligned}$$

(v) (1 Punkt) für die Skizze.

**Aufgabe 36.** [10 Punkte] Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen stetig in  $x = 0$  sind:

$$(i) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0; \end{cases}$$

$$(ii) g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 1, & \text{falls } x = 0; \end{cases}$$

(Hinweis: Die Potenzreihenentwicklung von  $\sin(x)$  könnte hilfreich sein.)

$$(iii) h: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{C}, h(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} \left( \frac{1}{x+1} - 1 \right)^2, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

*Lösung.*

- (i) (3 Punkte) Auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist die Funktion  $x \mapsto x \sin(1/x)$  als Komposition von stetigen Abbildungen stetig. Um die Stetigkeit bei  $x = 0$  zu überprüfen, sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Für  $\delta := \varepsilon$  gilt

$$|x \sin(1/x) - 0| = |x| \cdot |\sin(1/x)| \leq |x| < \varepsilon$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| < \delta$ ; hierbei haben wir verwendet, dass  $|\sin(y)| = |\operatorname{Re}(e^{iy})| \leq |e^{iy}| = 1$  für alle  $y \in \mathbb{R}$  gilt. Folglich ist  $f$  auch in  $x = 0$  stetig.

- (ii) (3 Punkte) Auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist  $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$  als Komposition von stetigen Abbildungen stetig. Für die Stetigkeit bei  $x = 0$  betrachten wir die Potenzreihenentwicklung  $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ . Dann ist auch

$$\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}$$

eine Potenzreihe mit positivem (sogar unendlichem) Konvergenzradius. Insbesondere konvergiert sie bei  $x = 0$  und hat dort den Wert 1 (dies ist der konstante Term). Also ist  $g$  stetig in  $x = 0$ .

- (iii) (4 Punkte) Auf  $(-1, \infty) \setminus \{0\}$  ist die Abbildung  $\frac{1}{|x|} \left( \frac{1}{x+1} - 1 \right)^2$  als Komposition von stetigen Abbildungen stetig. Wir schreiben

$$\frac{1}{|x|} \left( \frac{1}{x+1} - 1 \right)^2 = \frac{1}{|x|} \left( \frac{-x}{x+1} \right)^2 = \frac{x^2}{|x|} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Es genügt zu zeigen, dass die Abbildung  $h_1: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2}{|x|}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$  stetig bei  $x = 0$  ist und dort den Wert Null annimmt (denn die andere Funktion  $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$  ist stetig bei  $x = 0$ ). Sei nun  $\varepsilon > 0$  beliebig. Für  $\delta := \varepsilon$  gilt dann

$$\left| \frac{x^2}{|x|} - 0 \right| = \frac{|x|^2}{|x|} = |x| < \varepsilon,$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| < \delta$ . Dies zeigt, dass  $h_1$  stetig bei  $x = 0$  ist und dort den Wert Null annimmt. Also ist auch  $h$  stetig.

**Abgabe:** Sonntag, 21.06.2026, 23:59 Uhr