Institut für Mathematik
der Universität Paderborn
Dr. J. Kuit und Dr. C. Heyer

SoSe 2026
Freitag, 19.06.2026
Blatt 10

Übungen zur Analysis für Informatik

Aufgabe 37.[10 Punkte]

(i) Zeigen Sie, dass für alle $x \in [0,2]$ gilt:

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

(*Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass $\frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \leq \frac{x^n}{n!}$ für alle $n \geq 1$ und alle $x \in [0,2]$. Folgern Sie daraus zusammen mit der Potenzreihenentwicklung von $\sin(x)$ die Behauptung.)

(ii) Schließen Sie aus (i), dass $\sin(x) > 0$ für alle $x \in (0,2)$ gilt.

(iii) Zeigen Sie, dass cos im Intervall $(0,2)$ strikt monoton fallend ist. (*Hinweis:* Präsenzaufgabe 26 könnte hilfreich sein.)

(iv) Zeigen Sie, dass für alle $x \in [0,2]$ gilt:

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

(v) Zeigen Sie, dass cos im Intervall $[0,2]$ genau eine Nullstelle besitzt; diese Nullstelle wird mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet.

Aufgabe 38.[10 Punkte]

(i) Es sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung mit $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie, dass ein $c \in [0, \frac{1}{2}]$ existiert mit $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.

(*Hinweis:* Wenden Sie den Zwischenwertsatz an.)

(ii) Zeigen Sie: Es gibt keine stetige Bijektion $f\colon S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \to [0,1]$.

(*Hinweis:* Konstruieren Sie aus f eine stetige Abbildung $g\colon [0,1] \to [0,1]$ mit $g(0) = g(1)$ und so, dass $g\big|_{[0,1)}$ bijektiv ist.)

Aufgabe 39.[10 Punkte] Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{6x^2 + x}{x^3 + x^2 + x + 1}.$$

Zeigen Sie, dass f ein Maximum besitzt. Besitzt f auch ein Minimum?

Aufgabe 40.[10 Punkte]

(i) Es sei $s \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) \coloneqq \bar{z} \cdot |z|^s$ stetig ist.

Für welche $s \in \mathbb{Q}$ kann f stetig nach $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden?

(ii) Es sei $a \in \mathbb{R}$ fixiert. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{1/x^2}, & \text{falls } x \neq 0, \\ a, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

nicht stetig ist.

Abgabe: Sonntag, 28.06.2026, 23:59 Uhr