Institut für Mathematik
der Universität Paderborn
Dr. J. Kuit und Dr. C. Heyer

SoSe 2026
Freitag, 19.06.2026
Blatt 10

Übungen zur Analysis für Informatik

Aufgabe 37.[10 Punkte]

(i) Zeigen Sie, dass für alle $x \in [0,2]$ gilt:

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

(*Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass $\frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \leq \frac{x^n}{n!}$ für alle $n \geq 1$ und alle $x \in [0,2]$. Folgern Sie daraus zusammen mit der Potenzreihenentwicklung von $\sin(x)$ die Behauptung.)

(ii) Schließen Sie aus (i), dass $\sin(x) > 0$ für alle $x \in (0,2)$ gilt.

(iii) Zeigen Sie, dass cos im Intervall $(0,2)$ strikt monoton fallend ist. (*Hinweis:* Präsenzaufgabe 26 könnte hilfreich sein.)

(iv) Zeigen Sie, dass für alle $x \in [0,2]$ gilt:

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

(v) Zeigen Sie, dass cos im Intervall $[0,2]$ genau eine Nullstelle besitzt; diese Nullstelle wird mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet.

Lösung.

(i) (3 Punkte) Für alle $n \geq 1$ und alle $x \in [0,2]$ gilt $x^2 \leq 4 \leq (n+1)(n+2)$. Daraus folgt $\frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \leq \frac{x^n}{n!}$. Mit der Potenzreihenentwicklung $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ machen wir folgende Abschätzungen:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!} \right)}_{\geq 0} \geq x - \frac{x^3}{6}$$

und

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{x^{4k-1}}{(4k-1)!} - \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} \right)}_{\geq 0} \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

(ii) (1 Punkt) Für alle $x \in (0,2)$ folgt aus (i), dass $0 < x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin(x)$.

(iii) (1 Punkt) Aus Präsenzaufgaben 26 von Blatt 9 und (ii) folgt

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\sin\Big(\frac{x-y}{2}\Big) < 0$$

für alle $y < x$ in $(0,2)$ (denn es gilt auch $\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \in (0,2)$). Also ist cos strikt monoton fallend im Intervall $(0,2)$.

(iv) (3 Punkte) Es gilt $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$. Wie in (i) machen wir folgende Abschätzungen:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\Big(\frac{x^{4k}}{(4k)!} - \frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!}\Big)}_{\geq 0} \geq 1 - \frac{x^2}{2}$$

und

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{\Big(\frac{x^{4k-2}}{(4k-2)!} - \frac{x^{4k}}{(4k)!}\Big)}_{\geq 0} \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

(v) (2 Punkte) Es gilt $\cos(0) = 1$ und $\cos(2) \leq 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} = -\frac{8}{24} < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert also ein $x \in (0,2)$ mit $\cos(x) = 0$. Da cos in dem Intervall nach (iii) strikt monoton fallend und somit injektiv ist, ist dies die einzige Nullstelle.

Aufgabe 38.[10 Punkte]

(i) Es sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung mit $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie, dass ein $c \in [0, \frac{1}{2}]$ existiert mit $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.

(*Hinweis:* Wenden Sie den Zwischenwertsatz an.)

(ii) Zeigen Sie: Es gibt keine stetige Bijektion $f\colon S^1 \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \to [0,1]$.

(*Hinweis:* Konstruieren Sie aus f eine stetige Abbildung $g\colon [0,1] \to [0,1]$ mit $g(0) = g(1)$ und so, dass $g\big|_{[0,1)}$ bijektiv ist.)

Lösung.

(i) (5 Punkte) Wir betrachten die Abbildung $g\colon [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{2})$. Dann gilt

$$g(\tfrac{1}{2}) = f(\tfrac{1}{2}) - f(1) = f(\tfrac{1}{2}) - f(0) = -\big(f(0) - f(\tfrac{1}{2})\big) = -g(0).$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $c \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $g(c) = 0$, also $f(c) = f(c+\frac{1}{2})$.

(ii) (5 Punkte) Für einen Widerspruch nehmen wir an, dass eine stetige bijektive Abbildung $f\colon S^1 \to [0,1]$ existiert. Es sei $h\colon [0,1] \to S^1$ gegeben durch $h(x) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x}$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $h\big|_{[0,1)}$ bijektiv ist und dass $h(0) = h(1) = 1$ gilt. Wir betrachten nun $g \coloneqq f \circ h\colon [0,1] \to [0,1]$. Dann ist $g\big|_{[0,1)}$ bijektiv und es gilt $g(0) = g(1)$. Nach (i) existiert ein $c \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $g(c) = g(c + \frac{1}{2})$. Falls $c < \frac{1}{2}$, so widerspricht dies der Injektivität von $g\big|_{[0,1)}$. Falls $c = \frac{1}{2}$, so gilt $g(\frac{1}{2}) = g(1) = g(0)$, wieder im Widerspruch zur Injektivität von $g\big|_{[0,1)}$. Also war die Annahme falsch und es kann keine stetige Bijektion $S^1 \to [0,1]$ geben.

Aufgabe 39.[10 Punkte] Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{6x^2 + x}{x^3 + x^2 + x + 1}.$$

Zeigen Sie, dass f ein Maximum besitzt. Besitzt f auch ein Minimum?

Lösung. Da $[1,6]$ ein abgeschlossenes Intervall ist, nimmt $f\big|_{[1,3]}$ ein Maximum bei, sagen wir x_0 an. Wegen $f(1) = \frac{7}{4}$ gilt $f(x_0) \geq \frac{7}{4}$. Andererseits gilt $6x^2 + x < x^3 + x^2 + x + 1$ für alle $x > 6$ und somit $f(x) < 1$. Folglich nimmt f sein Maximum bei x_0 an.

Die Funktion f besitzt kein Minimum: Angenommen, es gäbe ein Minimum bei $y_0 \in [1,\infty)$. Wegen $f(x) > 0$ für alle $x \in [0,\infty)$ gilt also $f(y_0) > 0$. Andererseits gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2 + n}{n^3 + n^2 + n + 1} = 0,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$. Das heißt, es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) < f(y_0)$ im Widerspruch zur Wahl von y_0.

Aufgabe 40.[10 Punkte]

(i) Es sei $s \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \bar{z} \cdot |z|^s$ stetig ist.

Für welche $s \in \mathbb{Q}$ kann f stetig nach $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden?

(ii) Es sei $a \in \mathbb{R}$ fixiert. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{1/x^2}, & \text{falls } x \neq 0, \\ a, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

nicht stetig ist.

Lösung.

(i) (8 Punkte) Die Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ und $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_{>0}$, $z \mapsto |z|$ und $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto x^s$ sind stetig nach Vorlesung. Also ist auch f stetig auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ als Komposition von stetigen Abbildungen.

Es sei $s > -1$. Wir behaupten, dass f sich stetig nach 0 fortsetzen lässt. Es genügt zu zeigen, dass für jede Nullfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n \neq 0$ auch $(|f(z_n)|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Wegen $1 + s > 0$ gilt nun

$$|f(z_n)| = \left|\bar{z}_n \cdot |z_n|^s\right| = |\bar{z}_n| \cdot |z_n|^s = |z_n| \cdot |z_n|^s = |z_n|^{1+s} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Also lässt sich f für $s > -1$ stetig nach 0 fortsetzen.

Für $s \leq -1$ lässt sich f nicht stetig nach 0 fortsetzen. Für $s < -1$ gilt $|f(z_n)| = |z_n|^{1+s} \to \infty$ für jede Nullfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Für $s = -1$ finden wir zwei verschiedene Nullfolgen, für die f gegen verschiedene Werte konvergiert: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(\tfrac{\mathrm{i}}{n}) = \tfrac{-\mathrm{i}}{n} \cdot |\tfrac{\mathrm{i}}{n}|^{-1} = -\mathrm{i},$$

und

$$f(\tfrac{1}{n}) = \tfrac{1}{n} \cdot |\tfrac{1}{n}|^{-1} = 1.$$

(ii) (2 Punkte) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n^2} = \infty$ und somit $\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{1/x_n^2} = \infty$ nach Vorlesung. Also gilt $f_a(0) = a \neq \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{1/x_n^2} = \lim_{n\to\infty} f_a(x_n)$. Daher ist f_a nicht stetig.

Abgabe: Sonntag, 28.06.2026, 23:59 Uhr