

## Übungen zur Analysis für Informatik

**Aufgabe 41.**[20 Punkte] Welche der folgenden (eigentlichen und uneigentlichen) Grenzwerte existieren und welche nicht? Geben Sie den Grenzwert an, falls er existiert.

- (i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$  (*Hinweis:* Verwenden Sie die Potenzreihendarstellung von  $\cos$ );
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x}$ ;
- (iii)  $\lim_{x \nearrow 0} e^{i/x}$ ,  $\lim_{x \searrow 0} e^{i/x}$  und  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{i/x}$ ;
- (iv)  $\lim_{x \nearrow 1} f(x)$ ,  $\lim_{x \searrow 1} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , wobei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben ist durch  $f(x) = 0$  für  $x < 1$  und  $f(x) = 1$  für  $x \geq 1$ ;
- (v)  $\lim_{x \nearrow 0} g(x)$ ,  $\lim_{x \searrow 0} g(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ , wobei  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben ist durch  $g(x) = 0$  für  $x \leq 0$  und  $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$  für  $x > 0$ ;
- (vi)  $\lim_{x \nearrow 1} \frac{x}{x^2 - 1}$ ,  $\lim_{x \searrow 1} \frac{x}{x^2 - 1}$  und  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 - 1}$ ;
- (vii)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ ;
- (viii)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 + x^2 + 1$ ;
- (ix)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos(x)$ ;
- (x)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \cos(x)$ .

**Aufgabe 42.**[10 Punkte]

- (i) Zu  $n \in \mathbb{N}$  und  $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$  betrachten wir die Polynomfunktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ . Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (-1)^n \infty.$$

- (ii) Seien  $c \in \mathbb{C}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D$  und  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ . Zeigen Sie, dass  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$  genau dann gilt, wenn  $f(x_0) = c$ ,  $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = c$  und  $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = c$ .

**Aufgabe 43.**[10 Punkte] Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden differenzierbaren Funktionen mithilfe der Ableitungsregeln:

(i)  $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i};$

(ii)  $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2};$

(iii)  $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x^4 - x^3 + 1) \sin(x) e^{\sqrt{x}};$

(iv)  $g: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{x^4 + x^2 + 1}$  (mit  $f$  wie in (iii));

(v)  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2 + x^2 + \sin(x)^2}}.$

**Abgabe:** Sonntag, 05.07.2026, 23:59 Uhr