

Übungen zur Analysis für Informatik

Aufgabe 41.[20 Punkte] Welche der folgenden (eentlichen und uneentlichen) Grenzwerte existieren und welche nicht? Geben Sie den Grenzwert an, falls er existiert.

- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$ (*Hinweis:* Verwenden Sie die Potenzreihendarstellung von $\cos$);
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x}$;
- (iii) $\lim_{x \nearrow 0} e^{i/x}$, $\lim_{x \searrow 0} e^{i/x}$ und $\lim_{x \rightarrow 0} e^{i/x}$;
- (iv) $\lim_{x \nearrow 1} f(x)$, $\lim_{x \searrow 1} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, wobei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist durch $f(x) = 0$ für $x < 1$ und $f(x) = 1$ für $x \geq 1$;
- (v) $\lim_{x \nearrow 0} g(x)$, $\lim_{x \searrow 0} g(x)$ und $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, wobei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist durch $g(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$ für $x > 0$;
- (vi) $\lim_{x \nearrow 1} \frac{x}{x^2 - 1}$, $\lim_{x \searrow 1} \frac{x}{x^2 - 1}$ und $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 - 1}$;
- (vii) $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$, wobei $h: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sinh(\frac{1}{x-3})}{\cosh(\frac{1}{x-3})}$;
- (viii) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 + x^2 + 1$;
- (ix) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos(x)$;
- (x) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \cos(x)$.

Lösung.

- (i) (2 Punkte) Wir haben die Potenzreihendarstellung $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$. Daraus folgt $\frac{\cos(x)-1}{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k}}{(2k+2)!}$. Da also $\frac{\cos(x)-1}{x^2}$ durch eine Potenzreihe dargestellt wird, ist sie insbesondere stetig in $x = 0$ und es gilt $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.
- (ii) (2 Punkte) Für jedes $y \in \mathbb{R}$ gilt $e^y > y$ und somit $e^{-y} < \frac{1}{y}$. Daraus ergibt sich

$$\left| \frac{e^{-1/x^2}}{x} \right| = \frac{e^{-1/x^2}}{|x|} < \frac{x^2}{|x|} = |x|,$$

und es folgt $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = 0$.

- (iii) (2 Punkte) Die Grenzwerte existieren nicht: Für $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\frac{1}{\pi n})_{n \in \mathbb{N}}$ gilt

$$e^{i/x_n} = \cos(1/x_n) + i \sin(1/x_n) = \cos(\pi n) + i \sin(\pi n) = (-1)^n;$$

also existieren $\lim_{x \searrow 0} e^{i/x}$ und somit auch $\lim_{x \rightarrow 0} e^{i/x}$ nicht. Analog argumentiert man mit der Folge $(\frac{-1}{\pi n})_{n \in \mathbb{N}}$, dass $\lim_{x \nearrow 0} e^{i/x}$ nicht existiert.

- (iv) (2 Punkte) Es gilt $\lim_{x \nearrow 1} f(x) = 0$ und $\lim_{x \searrow 1} f(x) = 1$. Da die beiden Grenzwerte verschieden sind, existiert $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ nicht.
- (v) (2 Punkte) Es gilt $\lim_{x \nearrow 0} g(x) = 0$ und $\lim_{x \searrow 0} g(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$. Da die beiden Grenzwerte verschieden sind, existiert $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ nicht.
- (vi) (2 Punkte) Für $0 < x < 1$ gilt $x^2 - 1 = (x+1)(x-1) < 0$ und somit $\lim_{x \nearrow 1} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$. Für $x > 1$ gilt $x^2 - 1 = (x+1)(x-1) > 0$ und somit $\lim_{x \searrow 1} \frac{x}{x^2-1} = \infty$. Da die beiden Grenzwerte verschieden sind, existiert $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2-1}$ nicht.
- (vii) (2 Punkte) Nach Präsenzaufgabe 32(iii) gilt $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \pm 1$. Es folgt

$$\lim_{x \nearrow 3} \frac{\sinh(\frac{1}{x-3})}{\cosh(\frac{1}{x-3})} = -1,$$

und

$$\lim_{x \searrow 3} \frac{\sinh(\frac{1}{x-3})}{\cosh(\frac{1}{x-3})} = 1.$$

Da die einseitigen Grenzwerte zwar existieren aber verschieden sind, folgt, dass $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$ nicht existiert.

- (viii) (2 Punkte) Für $x \geq 1$ gilt $x^3 + x^2 + 1 > x^2 \geq x$ und somit $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 + x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$. Für $x < -2$ gilt $x^3 + x^2 + 1 < -2x^2 + x^2 + 1 = -x^2 + 1$ und somit $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 + 1 = -\infty$.
- (ix) (2 Punkte) Für $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\pi n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt $\cos(\pm x_n) = \cos(\pi n) = (-1)^n$; insbesondere existieren $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos(x)$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos(x)$ nicht.
- (x) (2 Punkte) Wieder mit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\pi n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt $\pm x_n \cos(\pm x_n) = \pm (-1)^n \pi n$. Daraus folgt, dass die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \cos(x)$ nicht existieren.

Aufgabe 42. [10 Punkte]

- (i) Zu $n \in \mathbb{N}$ und $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Polynomfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (-1)^n \infty.$$

- (ii) Seien $c \in \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$ genau dann gilt, wenn $f(x_0) = c$, $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = c$ und $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = c$.

Lösung.

- (i) (5 Punkte) Setze $R := 1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$. Für jedes $x > R$ gilt dann

$$f(x) \geq Rx^{n-1} - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| x^i = x^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| x^{n-1} - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| x^i \geq x^{n-1},$$

wobei für die letzte Ungleichung benutzt wurde, dass $x^i \leq x^{n-1}$ für alle $x > 1$ gilt. Daraus folgt $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-1} = \infty$.

Wir zeigen nun $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (-1)^n \infty$. Dazu betrachten wir die Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mit $g(x) = (-1)^n f(-x)$. Wir schreiben $g(x) = x^n + a'_{n-1} x^{n-1} + \dots + a'_0$. Nach dem ersten Fall gilt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-1)^n g(x) = (-1)^n \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = (-1)^n \cdot \infty$$

wie gewünscht.

- (ii) (5 Punkte) Es gelte $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$. Für die konstante Folge $(x_0)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt dann $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0) = c$, und offenbar gilt auch $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = c$ und $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = c$.

Es gelte nun $f(x_0) = c$, $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = c$ und $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = c$. Wir wollen zeigen, dass $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$ gilt. Sei dazu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Wir betrachten die folgenden Teilmengen $I_0, I_+, I_- \subseteq \mathbb{N}$ mit $\mathbb{N} = I_0 \sqcup I_+ \sqcup I_-$:

$$\begin{aligned} I_0 &:= \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = x_0\}, \\ I_+ &:= \{n \in \mathbb{N} \mid x_n > x_0\}, \\ I_- &:= \{n \in \mathbb{N} \mid x_n < x_0\}. \end{aligned}$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Falls I_+ unendlich ist, so existiert wegen $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = c$ ein $N_+ \in \mathbb{N}$ mit $|f(x_n) - c| < \varepsilon$ für alle $n \in I_+$ mit $n > N_+$; andernfalls setze $N_+ := \max \{n \in I_+ \mid x_n > x_0\}$. Analog definieren wir N_- (wobei wir $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = c$ verwenden). Wegen $f(x_n) = c$, für alle $n \in I_0$, gilt nun $|f(x_n) - c| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \max\{N_+, N_-\}$. Also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$. Da $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beliebig war, folgt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$.

Aufgabe 43. [10 Punkte] Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden differenzierbaren Funktionen mithilfe der Ableitungsregeln:

(i) $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i};$

(ii) $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2};$

(iii) $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x^4 - x^3 + 1) \sin(x) e^{\sqrt{x}};$

(iv) $g: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{x^4 + x^2 + 1}$ (mit f wie in (iii));

(v) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2 + x^2 + \sin(x)^2}}.$

Lösung.

- (i) (2 Punkte) Wir setzen $f_{\pm}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{\pm ix}$. Nach Vorlesung gilt dann $f'_+(x) = if_+(x)$ und $f'_-(x) = -if_-(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da Ableiten linear ist, folgt

$$\sin'(x) = \frac{f'_+(x) - f'_-(x)}{2i} = \frac{if_+(x) + if_-(x)}{2i} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos(x).$$

- (ii) (2 Punkte) Mit f_+ und f_- wie in (i) gilt wegen $i = -\frac{1}{i}$:

$$\cos'(x) = \frac{f'_+(x) + f'_-(x)}{2} = \frac{if_+(x) - if_-(x)}{2} = -\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -\sin(x).$$

- (iii) (2 Punkte) Schreibe $f_1(x) = x^4 - x^3 + 1$, $f_2(x) = \sin(x)$ und $f_3(x) = e^{\sqrt{x}}$. Dann gilt

$$f'_1(x) = 4x^3 - 3x^2,$$

$$f'_2(x) = \cos(x) \quad (\text{nach (i)}),$$

$$f'_3(x) = (\sqrt{\cdot})'(x) \cdot e^{\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \quad (\text{nach Kettenregel und Präsenzaufgabe 34})$$

Mit der Multiplikationsregel folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'_1(x) \cdot f_2(x) f_3(x) + f_1(x) \cdot (f_2 \cdot f_3)'(x) \\ &= f'_1(x) f_2(x) f_3(x) + f_1(x) f'_2(x) f_3(x) + f_1(x) f_2(x) f'_3(x) \\ &= (4x^3 - 3x^2) \sin(x) e^{\sqrt{x}} + (x^4 - x^3 + 1) \cos(x) e^{\sqrt{x}} + \frac{(x^4 - x^3 + 1) \sin(x) e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

- (iv) (2 Punkte) Schreibe $g_1(x) = x^4 + x^2 + 1$. Mit der Quotientenregel (Präsenzaufgabe 33) rechnen wir

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{f'(x)g_1(x) - f(x)g'_1(x)}{g_1(x)^2} = \frac{f'(x)}{g_1(x)} - \frac{f(x)g'_1(x)}{g_1(x)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{x}(4x^3 - 3x^2) \sin(x) e^{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}(x^4 - x^3 + 1) \cos(x) e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x} \cdot (x^4 + x^2 + 1)} \\ &\quad + \frac{(x^4 - x^3 + 1) \sin(x) e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x} \cdot (x^4 + x^2 + 1)} - \frac{(x^4 - x^3 + 1) \sin(x) e^{\sqrt{x}} \cdot (4x^3 + 2x)}{(x^4 + x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

- (v) (2 Punkte) Mit den Ableitungsregeln (Quotienten-, Multiplikations- und Additionsregel) rechnen wir

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\frac{(x \mapsto \sqrt{2 + x^2 + \sin(x)^2})'(x)}{2 + x^2 + \sin(x)^2} = -\frac{\frac{2x + 2\sin(x)\cos(x)}{2\sqrt{2 + x^2 + \sin(x)^2}}}{2 + x^2 + \sin(x)^2} \\ &= -\frac{x + \sin(x)\cos(x)}{(2 + x^2 + \sin(x)^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Abgabe: Sonntag, 05.07.2026, 23:59 Uhr