

Übungen zur Analysis für Informatik

Aufgabe 44.[10 Punkte] Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x|x|$$

differenzierbar ist. Zeigen Sie anschließend, dass f' stetig, aber nicht differenzierbar ist.

Lösung. Auf $\mathbb{R}_{>0}$ ist f differenzierbar, denn auf diesem Bereich gilt $f(x) = x^2$ und daher $f'(x) = 2x$. Auf $\mathbb{R}_{<0}$ ist f differenzierbar, denn es gilt $f(x) = -x^2$ und somit $f'(x) = -2x$. Für die Differenzierbarkeit in $x_0 = 0$ genügt es, die Grenzwerte $\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ und $\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ zu berechnen und zu prüfen, dass sie gleich sind. Nun gilt

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \searrow 0} |x| = 0$$

und analog

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} |x| = 0.$$

Folglich ist f auch in $x_0 = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = 0$. Zusammengenommen gilt $f'(x) = 2|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$; insbesondere ist f stetig.

Aber f' ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$, denn es gilt

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{2|x|}{x} = \lim_{x \searrow 0} 2 = 2$$

und

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{2|x|}{x} = \lim_{x \nearrow 0} -2 = -2.$$

Also stimmen die einseitigen Grenzwerte nicht überein und f' ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$.

Aufgabe 45.[10 Punkte] Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie deren Ableitung:

(i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(\sqrt{x^4 + 2x^2 + 4});$

(ii) $g: \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sinh(\ln(3x^2))}{\sin(x)}.$

Lösung.

(i) Als Verknüpfung der differenzierbaren Funktionen

$$\begin{aligned} f_1: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_{>0}, & f_1(x) &= x^4 + 2x^2 + 4, \\ f_2: \mathbb{R}_{>0} &\rightarrow \mathbb{R}_{>0}, & x &\mapsto \sqrt{x}, \\ f_3: \mathbb{R}_{>0} &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto \ln(x) \end{aligned}$$

ist f differenzierbar. Für die Ableitung gilt nach Kettenregel, für alle $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'_3(f_2(f_1(x))) \cdot f'_2(f_1(x)) \cdot f'_1(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^4 + 2x^2 + 4}} \cdot (4x^3 + 4x) \\ &= \frac{2x^3 + 2x}{x^4 + 2x^2 + 4}. \end{aligned}$$

(ii) Die Abbildung g ist als Komposition von differenzierbaren Funktionen differenzierbar. Wir schreiben $g = \frac{g_1}{g_2}$ mit $g_1(x) = \sinh(\ln(3x^2))$ und $g_2(x) = \sin(x)$. Dann gilt nach Quotienten- und Kettenregel, dass

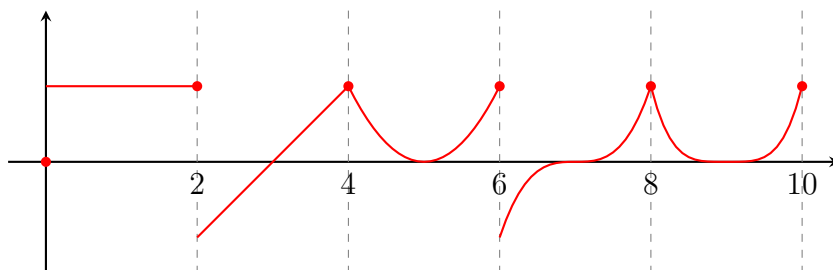
$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{g'_1(x)g_2(x) - g_1(x)g'_2(x)}{g_2(x)^2} \\ &= \frac{\cosh(\ln(3x^2)) \cdot \frac{1}{3x^2} \cdot 6x \cdot \sin(x) - \sinh(\ln(3x^2)) \cos(x)}{\sin(x)^2} \\ &= \frac{2 \cosh(\ln(3x^2)) \sin(x) - x \sinh(\ln(3x^2)) \cos(x)}{x \sin(x)^2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 46.[10 Punkte] Untersuchen Sie die folgende Funktion auf lokale und globale Extrema:

$$f: [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0, \\ (x - 2k - 1)^k, & \text{falls } x \in (2k, 2k + 2] \text{ und } 0 \leq k \leq 4. \end{cases}$$

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f .

Lösung. Wir skizzieren zunächst den Graphen von f :



Bei 0 hat die Funktion offenbar ein lokales Minimum. Auf dem Intervall $(0, 2]$ sowie bei 4, 6, 8, 10 besitzt die Funktion ein globales Maximum.

Im Intervall $(2, 4]$ gilt $f(x) = x - 3$; wegen $f'(x) = 1 \neq 0$ besitzt f auf diesem Intervall also kein lokales Extremum.

Im Intervall $(4, 6]$ gilt $f(x) = (x - 5)^2$; wegen $f'(x) = 2x - 10$ und $f''(5) = 10 > 0$ besitzt f bei 5 ein lokales Minimum.

Im Intervall $(6, 8]$ gilt $f(x) = (x - 7)^3$; wegen $f'(x) = 3(x - 7)^2$ ist $x = 7$ die einzig mögliche Stelle eines lokalen Extremums. Allerdings gilt $f(x) < 0$ für $x < 7$ und $f(x) > 0$ für $x > 7$. Somit besitzt also f kein lokales Extremum bei $x = 7$.

Im Intervall $(8, 10]$ gilt $f(x) = (x - 9)^4$; wegen $f'(x) = 4(x - 9)^3$ ist $x = 9$ die einzig mögliche Stelle eines lokalen Extremums. Wegen $f(x) > 0$ für $x < 9$ und $f(x) > 0$ für $x > 9$ handelt es sich bei $x = 9$ somit um die Stelle eines lokalen Minimums.

Aufgabe 47.[10 Punkte] Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ist bekanntlich gleich 1. Sei $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x^k$. Begründen Sie, dass f unendlich oft differenzierbar ist und zeigen Sie, dass

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=1}^j (k+i) x^k = \frac{j!}{(1-x)^{j+1}}$$

für alle $x \in (-1, 1)$ gilt.

Lösung. Nach Vorlesung ist eine Potenzreihe in ihrem Konvergenzkreis unendlich oft differenzierbar, und die Ableitung kann summandenweise berechnet werden. Wir zeigen die Formel für die Ableitung durch Induktion nach j .

Für $j = 0$ ist die Behauptung $f^{(0)}(x) = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$; dies ist klar mit der geometrischen Reihe.

Es gelte nun $f^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=1}^j (k+i) x^k = \frac{j!}{(1-x)^{j+1}}$ für ein $j \geq 0$. Wir rechnen nun

$$\begin{aligned} f^{(j+1)}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \prod_{i=1}^j (k+i) x^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^j (k+i) x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=0}^j (k+i+1) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{j+1} (k+i) x^k \end{aligned}$$

sowie

$$f^{(j+1)}(x) = \frac{d}{dx} \frac{j!}{(1-x)^{j+1}} = \frac{j! \cdot (j+1)}{(1-x)^{j+2}} = \frac{(j+1)!}{(1-x)^{j+2}}.$$

Dies beendet den Induktionsschritt und beweist die Behauptung.

Abgabe: Sonntag, 12.07.2026, 23:59 Uhr