Institut für Mathematik
der Universität Paderborn
Dr. J. Kuit und Dr. C. Heyer

SoSe 2026
Freitag, 17.04.2026
Präsenzblatt 1

Übungen zur Analysis für Informatik

Präsenzaufgabe 1. Der *Betrag* einer rationalen Zahl $x \in \mathbb{Q}$ ist definiert als die nicht-negative Zahl

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $|x| = \max\{x, -x\}$ und $-|x| = \min\{x, -x\}$.

(b) Zeigen Sie, für alle $x, y \in \mathbb{Q}$, dass

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}\big(x + y + |x - y|\big),$$
$$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}\big(x + y - |x - y|\big).$$

Präsenzaufgabe 2. Es sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper und $x, y, v, w \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $x < y \iff -x > -y$;

(ii) $x < y$ und $v > 0 \implies xv < yv$;

(iii) $x < y$ und $v < 0 \implies xv > yv$;

(iv) $x > 1 \iff 0 < x^{-1} < 1$;

(v) $x < v$ und $y < w \implies x + y < v + w$.

Präsenzaufgabe 3.

(a) Zeigen Sie $n^2 \leq 2^n$ für alle natürlichen Zahlen $n \neq 3$.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Zahl $n!$ (lies: n Fakultät) rekursiv definiert durch $0! := 1$ und $n! := n \cdot (n-1)!$ für alle $n \geq 1$.

Zeigen Sie $2^n < n!$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$.

Präsenzaufgabe 4.

(i) Bestimmen Sie für die folgenden Werte von b natürliche Zahlen $N \in \mathbb{N}_0$ und $c_0, \ldots, c_N \in \{0, \ldots, b-1\}$ derart, dass

$$1000 = c_0 + c_1 b + \cdots + c_N b^N.$$

(a) $b = 2$;

(b) $b = 3$;

(c) $b = 10$.

(ii) Sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b > 1$ und $\{c_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ natürliche Zahlen mit $0 \leq c_i \leq b-1$. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\sum_{i=0}^{n} c_i b^i \leq b^{n+1} - 1.$$

Abgabe: keine.