Institut für Mathematik
der Universität Paderborn
Dr. J. Kuit und Dr. C. Heyer

SoSe 2026
Freitag, 24.04.2026
Präsenzblatt 2

Übungen zur Analysis für Informatik

Präsenzaufgabe 5.

(a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und sei $-A := \{-x \mid x \in A\}$. Zeigen Sie

$$\sup(-A) = -\inf A.$$

(b) Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nach unten beschränkte, nichtleere Teilmenge. Zeigen Sie, dass A ein Infimum in $\mathbb{R}$ besitzt.

(c) Sei I eine Menge und, für $i \in I$, sei $A_i \subseteq \mathbb{R}$. Wir definieren die Vereinigung aller Teilmengen A_i durch

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in \mathbb{R} \mid \text{es gibt ein } i \in I \text{ mit } x \in A_i\}.$$

Wir nehmen an, dass $m_i := \sup A_i$ in $\mathbb{R}$ existiert, für alle $i \in I$. Beweisen Sie: Wenn es ein $C > 0$ gibt so, dass $m_i \leq C$ für alle $i \in I$, dann existiert das Supremum von $\bigcup_{i \in I} A_i$ in $\mathbb{R}$ und

$$\sup\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = \sup\{m_i \mid i \in I\}.$$

Präsenzaufgabe 6. Bestimmen Sie, falls existent, das Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (in $\mathbb{R}$) der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$:

(i) $M_1 = \left\{\frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}, n < 0, m \leq -n\right\}$;

(ii) $M_2 = \left\{\frac{1}{n^3} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$;

(iii) $M_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2, x > 0\}$;

(iv) $M_4 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2, x > 0\}$.

(*Hinweis:* Es darf benutzt werden, dass zwischen zwei unterschiedlichen reellen Zahlen immer eine rationale Zahl liegt.)

Präsenzaufgabe 7.

(i) Es sei $x \in \mathbb{R}$ und

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

der Betrag von x. Zeigen Sie, dass $|x| = \sqrt{x^2}$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass $\sqrt[7]{\dfrac{50^6}{5^{14}} \cdot \dfrac{5}{3^7} \cdot (\sqrt[7]{10} \cdot 9)^7} = 6$.

Abgabe: keine.