Institut für Mathematik
der Universität Paderborn
Dr. J. Kuit und Dr. C. Heyer

SoSe 2026
Freitag, 15.05.2026
Präsenzblatt 5

Übungen zur Analysis für Informatik

Präsenzaufgabe 14. Entscheiden Sie, welche der Folgen konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{3+7+\frac{8}{n}}} + \frac{7n^2+n+1}{n^2+3n+1}$;

(ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = (-1)^n \frac{7n^7-4}{n^7+n+1}$;

(iii) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $0 < a \leq b$;

(iv) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = (-1)^n \cdot (1 + \frac{2}{\sqrt{n}}) + (-1)^{n+1} \sqrt[n]{n}$.

Präsenzaufgabe 15.

(i) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = n \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(*Hinweis:* Die Identität $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ $(a, b \in \mathbb{R})$ könnte hilfreich sein.)

(ii) Es sei allgemeiner $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Folge

$$\left(\frac{\sqrt{1 + b_n} - 1}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Präsenzaufgabe 16. Es sei φ die positive Lösung der quadratischen Gleichung

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0.$$

Man nennt φ auch den *goldenen Schnitt*.

(i) Bestimmen Sie einen expliziten Ausdruck für φ und geben Sie einen Näherungswert von φ an.

(ii) Wir betrachten die reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die rekursiv gegeben ist durch $x_0 \coloneqq 1$ und $x_{n+1} \coloneqq 1 + \frac{1}{x_n}$. Zeigen Sie, dass

$$|x_n - \varphi| \leq \frac{1}{\varphi^{n+1}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt und folgern Sie $\lim_{n\to\infty} x_n = \varphi$. (*Hinweis:* Induktion nach n. Dabei könnte $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$ hilfreich sein.)

(iii) Wir betrachten die reelle Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die rekursiv gegeben ist durch $y_0 \coloneqq 1$ und $y_{n+1} \coloneqq \sqrt{1+y_n}$. Zeigen Sie, dass

$$|y_n - \varphi| \leq \frac{1}{\varphi^{n+1}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt und folgern Sie $\lim_{n\to\infty} y_n = \varphi$. (*Hinweis:* Induktion nach n. Es könnte hilfreich sein, zu benutzen, dass $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$ gilt, für $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq -b$.)

Abgabe: keine.