Institut für Mathematik
der Universität Paderborn
Dr. J. Kuit und Dr. C. Heyer

SoSe 2026
Freitag, 22.05.2026
Präsenzblatt 6

Übungen zur Analysis für Informatik

Präsenzaufgabe 17. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv gegeben durch $x_0 := a$, $x_1 := b$ und $x_n := \frac{1}{2} \cdot (x_{n-1} + x_{n-2})$ für $n \geq 2$.

(i) Skizzieren Sie die Werte $x_0, x_1, \ldots, x_5$ in $\mathbb{R}$.

(ii) Zeigen Sie, dass $x_{n+1} - x_n = (-1)^n \cdot \frac{b-a}{2^n}$ für alle $n \geq 0$.

(iii) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

(*Hinweis:* Bestimmen Sie zunächst einen expliziten Ausdruck für x_n. Dafür schreibe man $x_n - a = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)$ und berechne diesen Ausdruck mittels (ii) und der geometrischen Summe.)

Präsenzaufgabe 18. In Aufgabe 16 auf Blatt 4 wurde gezeigt, dass die Folge

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

gegen einen Wert $c \in [2, 3]$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = c$.
(*Hinweis:* Im Beweis zu Aufgabe 16 wird gezeigt, dass $((1+\frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend ist. Zeigen Sie zuerst, dass für fixiertes $m \in \mathbb{N}$ und alle $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $(1-\varepsilon)\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \leq c$ gilt; schreiben Sie dafür $(1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_{n,k}}{k!}$ und zeigen Sie, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq N$ und alle $0 \leq k \leq m$ die Abschätzung $1 - \varepsilon \leq c_{n,k} \leq 1$ gilt. Machen Sie sich anschließend klar, dass die obige Aussage äquivalent ist zu $\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \leq c$ und folgern Sie, dass $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq c$. Zeigen Sie anschließend die Ungleichung $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \geq c$.)

Präsenzaufgabe 19. Man überprüfe die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{n}}$;

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}(2^{-n} + 3^{-n})$;

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2 2^k}{(2k)!}$;

(iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2k)^k}$;

(v) $\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt[k]{k} - 1)$;

(vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{1+3n}}$.

(vii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{n^2+n+1}}$;

(viii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6+n+1}{3n^6+n^2+1}$.

Abgabe: keine.