Institut für Mathematik
der Universität Paderborn
Dr. J. Kuit und Dr. C. Heyer

SoSe 2026
Freitag, 29.05.2026
Präsenzblatt 7

Übungen zur Analysis für Informatik

Präsenzaufgabe 20. Berechnen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k^{k+1}} z^k$;

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 3^k z^{3k}$;

(iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^{10}+k} \cdot z^k$;

(iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k^2}}{k+5} \cdot z^k$;

(v) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{k^2+(-1)^k}{k^2+2}\Big)^k z^k$.

Präsenzaufgabe 21.

(i) Zeigen Sie, das für $s \in \mathbb{C}$ der Konvergenzradius der Binomialreihe

$$B_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} z^k$$

gleich 1 ist, falls $s \notin \mathbb{N}_0$, und unendlich ist für $s \in \mathbb{N}_0$; hierbei ist der Binomialkoeffizient gegeben durch $\binom{s}{k} := \frac{s\cdot(s-1)\cdot(s-2)\cdots(s-k+1)}{k!}$.

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und alle $s, t \in \mathbb{C}$ die Identität

$$B_{s+t}(z) = B_s(z) \cdot B_t(z)$$

gilt.

(iii) Zeigen Sie, dass $B_s(z) \neq 0$ für alle $s, z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$.

(iv) Zeigen Sie, dass $B_s(x) > 0$ für alle $s, x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

Präsenzaufgabe 22. Welche der angegebenen Folgen besitzen eine konvergente Teilfolge und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{\mathrm{i}\cdot(n+n^2)}{n^2-\mathrm{i}}$ (wobei $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit ist);

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n$;

(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \sqrt{n}$;

(d) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = (\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\sqrt{2}})^n$ (wobei e die Euler'sche Zahl ist).

Abgabe: keine.