Institut für Mathematik
der Universität Paderborn
Dr. J. Kuit und Dr. C. Heyer

SoSe 2026
Freitag, 12.06.2026
Präsenzblatt 9

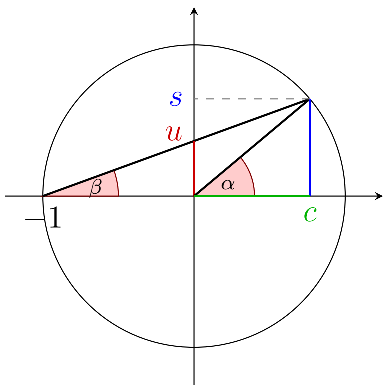
Übungen zur Analysis für Informatik

Präsenzaufgabe 26. Es seien $z, w \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie die Identität

$$\cos(z) - \cos(w) = -2\sin\Big(\frac{z+w}{2}\Big) \cdot \sin\Big(\frac{z-w}{2}\Big).$$

(*Hinweis:* Stellen Sie z und w durch $u = \frac{z+w}{2}$ und $v = \frac{z-w}{2}$ dar und wenden Sie die Additionstheoreme an.)

Präsenzaufgabe 27. In dieser Aufgabe sollen die Identitäten $\sin(\alpha) = \frac{2u}{1+u^2}$ und $\cos(\alpha) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ mit $u := \tan(\frac{\alpha}{2})$ gezeigt werden, wobei $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$, indem man die Definitionen von Sinus und Kosinus im rechtwinkligen Dreieck verwendet. Dazu betrachten wir das folgende Diagramm:



(i) Zeigen Sie $s = \sin(\alpha)$ und $c = \cos(\alpha)$;

(ii) Formulieren Sie die Gleichung für die Gerade $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ durch die Punkte $(-1, 0)$ und (c, s) in Abhängigkeit vom Parameter u;

(iii) Zeigen Sie $s = \frac{2u}{1+u^2}$ und $c = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, indem Sie die Schnittpunkte von g mit dem Einheitskreis berechnen;

(iv) Zeigen Sie $u = \tan(\frac{\alpha}{2})$. (*Hinweis:* Warum gilt $\beta = \frac{\alpha}{2}$?)

Präsenzaufgabe 28.

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{x}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

stetig ist. (*Hinweis:* Es gilt $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$.)

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\chi_{[0,1]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [0,1], \\ 0, & \text{falls } x \notin [0,1] \end{cases}$$

nicht stetig ist. In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist $\chi_{[0,1]}$ stetig/folgenstetig und in welchen nicht?

Abgabe: keine.