

Übungen zur Analysis für Informatik

Präsenzaufgabe 29. Zeigen Sie: Jede stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ ist konstant.
Welche Abbildungen $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetig?

Präsenzaufgabe 30. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) > a$ und $f(b) < b$. Zeigen Sie, dass ein $x \in (a, b)$ existiert mit $f(x) = x$.
(*Hinweis:* Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - x$ an.)

Präsenzaufgabe 31.

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} (e^{|x|} - 1) \cos\left(\frac{1}{x^2}\right), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

stetig ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } |x| < \sqrt{2}, \\ 1, & \text{falls } |x| > \sqrt{2} \end{cases}$$

auf ganz \mathbb{Q} stetig ist.

Abgabe: keine.