Institut für Mathematik
der Universität Paderborn
Dr. J. Kuit und Dr. C. Heyer

SoSe 2026
Freitag, 26.06.2026
Präsenzblatt 11

Übungen zur Analysis für Informatik

Präsenzaufgabe 32. Welche der folgenden Grenzwerte existieren (in $\mathbb{R}$ oder als uneigentliche Grenzwerte $\pm\infty$)? Geben Sie den Grenzwert an, falls er existiert. Begründen Sie ihre Antwort.

(i) $\lim_{x\to 0} f(x)$, wobei $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{x}$ (*Hinweis:* Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$);

(ii) $\lim_{x\to 0} g(x)$, wobei $g\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x^2}$;

(iii) $\lim_{x\to 3} h(x)$, wobei $h\colon \mathbb{R}\setminus\{3\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\sinh(\frac{1}{x-3})}{\cosh(\frac{1}{x-3})}$;

(iv) $\lim_{x\nearrow 0} \sin(1/x)$;

(v) $\lim_{x\searrow 0} \dfrac{\ln(x^2)}{x}$;

(vi) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x)}{x} - 4$;

(vii) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sinh(x)}{x}$;

(viii) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{i}x^2 + x + 1}{-x^2 + 5x + 1}$ (wobei $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit ist);

(ix) $\lim_{x\to 0} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0} f(x)$ (mit $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ beliebig) und $\lim_{x\to\infty} f(x)$, wobei

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} x^3, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

(*Hinweis:* Verwenden Sie, dass $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$, wobei $\overline{A}$ der Abschluss einer Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ bezeichnet.)

Präsenzaufgabe 33. Zeigen Sie die Quotientenregel: Sei $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ Funktionen die in $x_0 \in U$ differenzierbar sind. Es gelte $g(x) \neq 0$ für alle $x \in U$.
Zeigen Sie, dass die Funktion $\frac{f}{g}\colon U \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ differenzierbar in x_0 ist mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Insbesondere gilt $(\frac{1}{g})'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Präsenzaufgabe 34.

(i) Zeigen Sie, dass die Wurzelfunktion

$$\sqrt{}\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

differenzierbar ist, mit Ableitung $(\sqrt{})'\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Ist $(\sqrt{})'$ wieder differenzierbar?

(ii) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\sqrt{\cosh(x)}}{x^2+1}$.

Abgabe: keine.