

Übungen zur Analysis für Informatik

Präsenzaufgabe 38. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion:

- (i) $f(x) = 9x^3 - 4x^2 + \frac{1}{2}x - 1$ für $x \in U = \mathbb{R}$;
- (ii) $f(x) = xe^{3x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x}$ für $x \in U = \mathbb{R}_{>0}$;
- (iii) $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$ für $x \in U = (0, \frac{\pi}{2})$ (*Hinweis:* Versuchen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{1}{\sin(x)} dx$ mittels Substitution zu lösen; es gilt $\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$ mit $u = \tan(x/2)$).

Präsenzaufgabe 39. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

- (i) $\int_0^2 (x^3 + 2x^2 - x - 4) dx$;
- (ii) $\int_0^1 \sqrt{1-x} dx$;
- (iii) $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx$.

Präsenzaufgabe 40. Überprüfen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz. Geben Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert an:

- (i) $\int_0^1 x^\alpha dx$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (ii) $\int_0^1 \ln(x) dx$;
- (iii) $\int_0^1 \frac{1}{\sin(x)} dx$ (*Hinweis:* Es gilt $\sin(x) \leq x$ für alle $0 \leq x \leq 1$).

Präsenzaufgabe 41.[Zusatz]

- (i) $f(x) = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(x-1) - \sqrt{x^3}}{(x-1)^2}$ für $x \in U = \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ (*Hinweis:* Quotientenregel);
- (ii) $f(x) = \ln(x)$ für $x \in U = \mathbb{R}_{>0}$ (*Hinweis:* Betrachten Sie $x \mapsto x \ln(x)$);
- (iii) $f(x) = 1 - 2 \sin(x)^2$ für $x \in U = \mathbb{R}$ (*Hinweis:* Es gilt $1 - \sin(x)^2 = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$).

Präsenzaufgabe 42.[Zusatz] Berechnen Sie die folgenden Integrale:

- (i) $\int_a^b p(x) dx$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ eine Polynomfunktion ist (mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$);
- (ii) $\int_0^\pi x^3 \cos(x) dx$;
- (iii) $\int_0^{\pi/4} \tan(x) dx$;
- (iv) $\int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^2} dx$;
- (v) $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x(\ln^2(x) - \ln(x) + 1)} dx$.

Präsenzaufgabe 43.[Zusatz] Überprüfen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz. Geben Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert an.

- (i) $\int_1^\infty x^\alpha dx$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (ii) $\int_0^\infty \frac{x}{x+1} dx$;
- (iii) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx$.

Abgabe: keine.