

Übungen zur Analysis für Informatik

Präsenzaufgabe 44. Bestimmen Sie die Taylorpolynome T_n und die zugehörigen Restglieder R_n (für $n \in \mathbb{N}_0$) im Entwicklungspunkt $x = 0$ für die folgenden Funktionen:

- (i) $\sin: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$;
- (ii) $\cosh: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$;
- (iii) $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(1+x)$; zeigen Sie anschließend, dass

$$\ln(1+x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n f(x, 0) \quad \text{für alle } x \in (-1, 1).$$

(iv)

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0; \end{cases}$$

zeigen Sie anschließend, dass $g(x) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} T_n g(x; 0)$ für alle $x \neq 0$.

Präsenzaufgabe 45. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

- (i) $\lim_{x \searrow 0} x^2 \ln(x)$;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^4 + 2x}$;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right)$;
- (iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x) - \sin(2x)}{x - \sin(x)}$;
- (v) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x}$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$.

Präsenzaufgabe 46. Bestimmen Sie die Taylorpolynome $T_n \arctan$ und die Restglieder $R_n \arctan$ von $\arctan: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ um den Entwicklungspunkt $x = 0$ (für $n \in \mathbb{N}_0$). Zeigen Sie, dass $\arctan$ durch seine Taylorreihe dargestellt wird und folgern Sie daraus die Identität

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{3^j (2j+1)}.$$

(Hinweis: Es gilt $\frac{1}{x^2+1} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right)$ und $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$.)

Präsenzaufgabe 47.[Zusatz] Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)^2 \sinh(x)}{(e^x - 1)^2 x};$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3(x) \cos(x) \sin(e^x - 1)}{x^2 + x + e^x - 1};$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos(x) \sinh(x^2)}{\sqrt{3}x^2 + \cosh(x) - 1};$

(iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^3} + 1)^{1/\ln(x)}.$

Abgabe: keine.