

Analysis für Informatik

Klausur

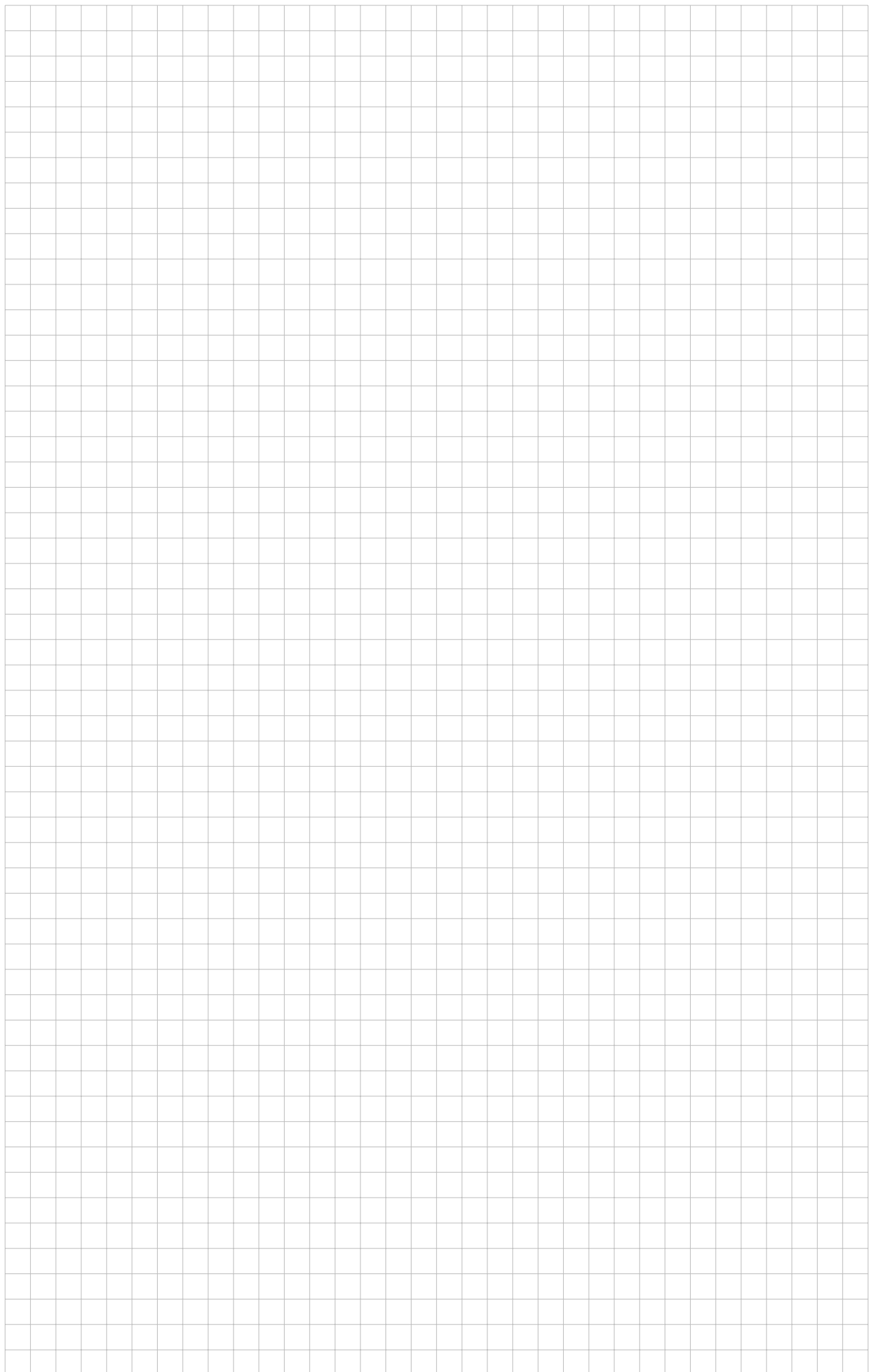
Name:

Matrikelnummer:

Wichtige Informationen:

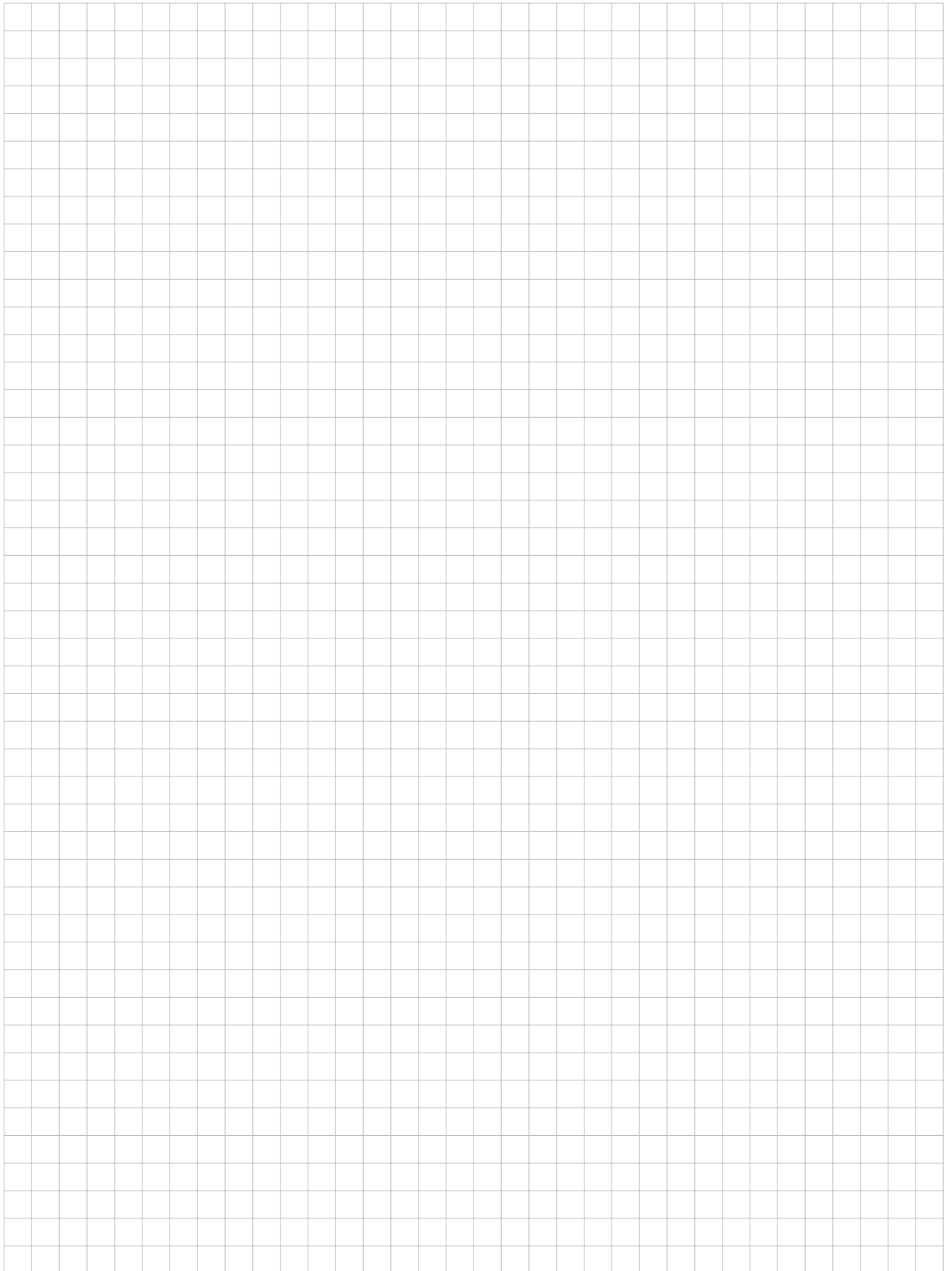
- Bitte halten Sie einen Lichtbildausweis zur Kontrolle auf Ihrem Platz bereit.
- Als Hilfsmittel ist alles in Papierform erlaubt. Elektronische Hilfsmittel sind nicht erlaubt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausur besteht aus sechs Aufgaben mit insgesamt 100 Punkten.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein. Begründen Sie alle Ihre Antworten!

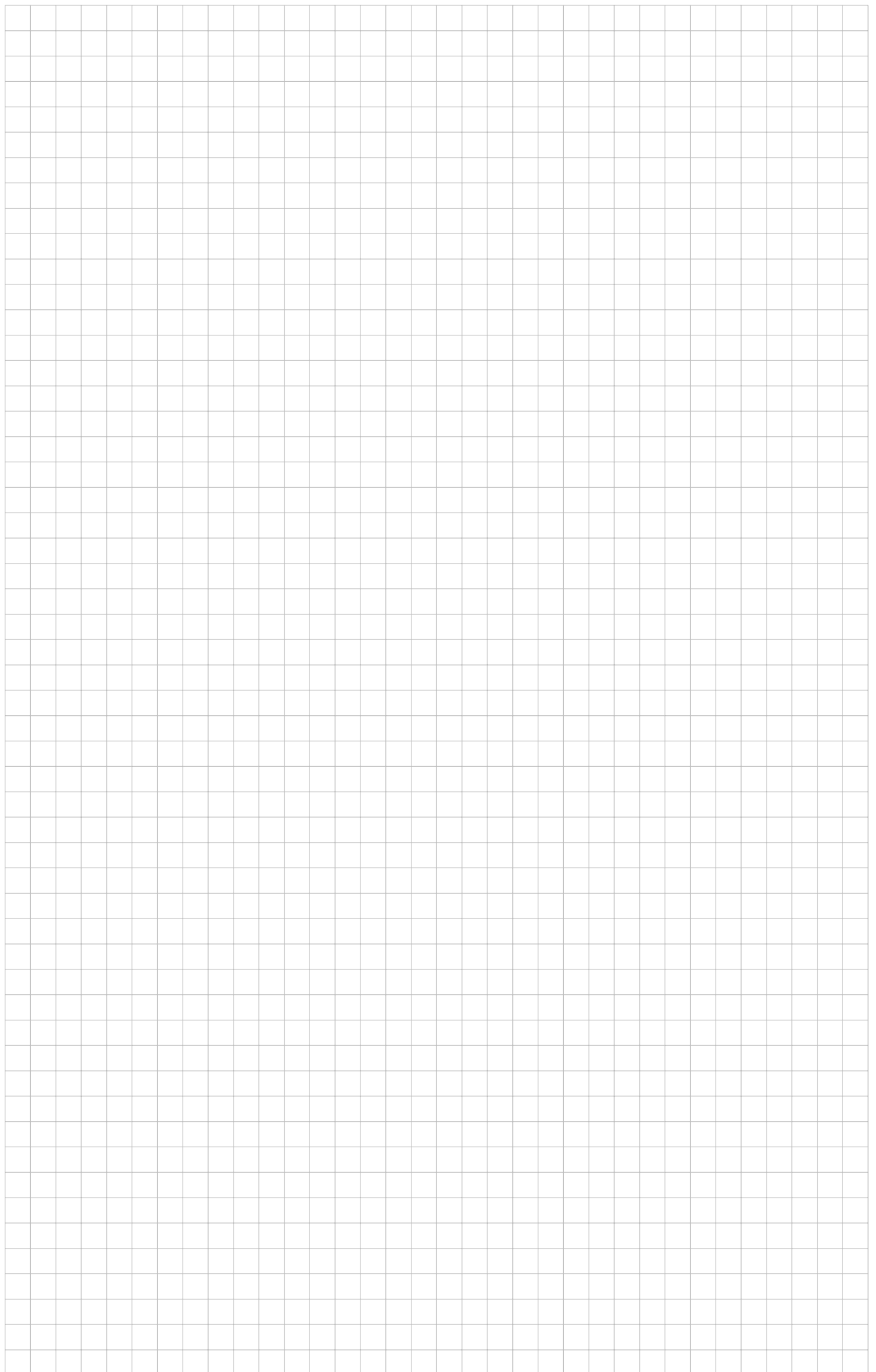
1	2	3	4	5	6	Summe



Aufgabe 1: (15 Punkte)

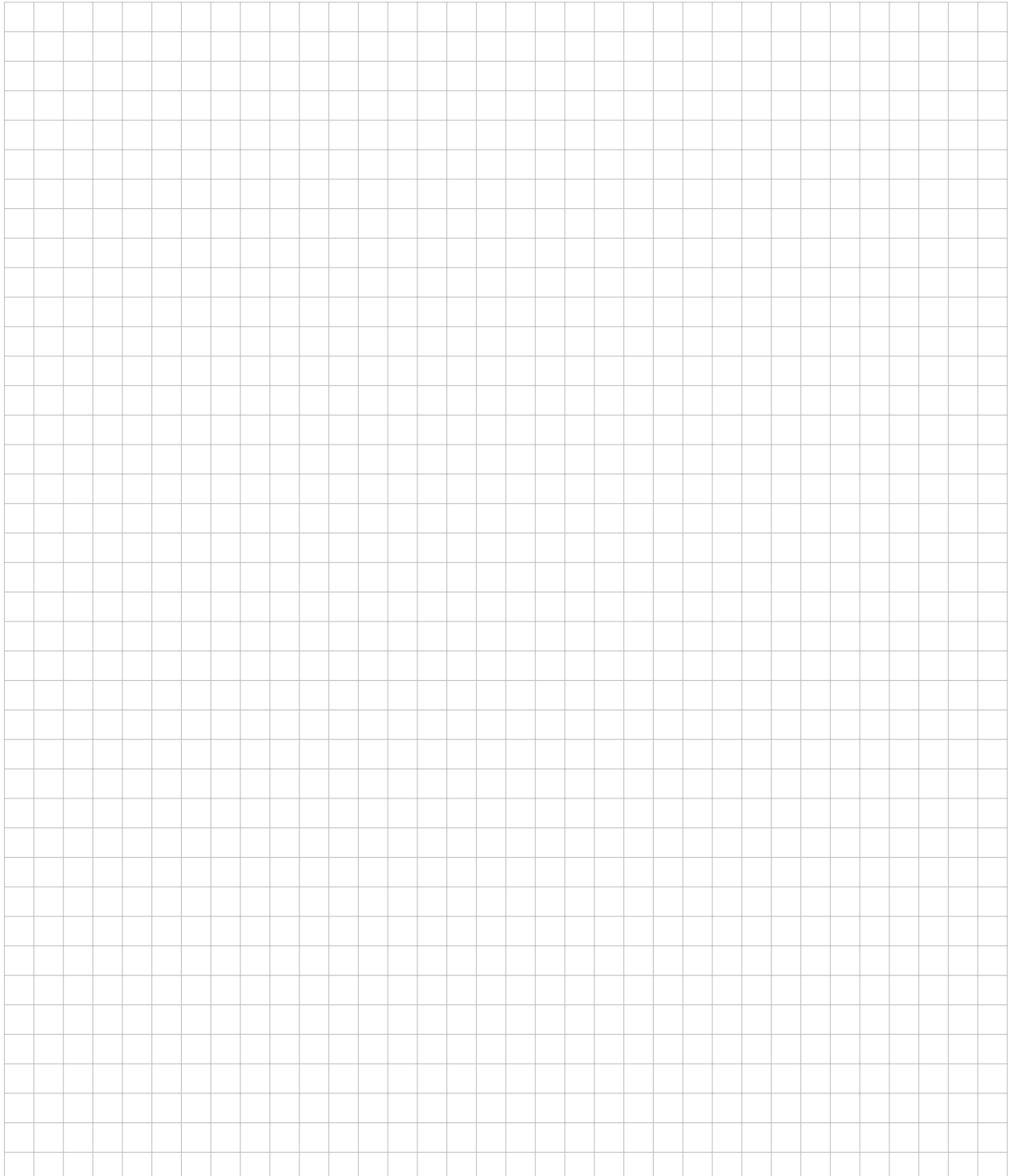
- (i) Bestimmen Sie $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$ und $|z|$ von $z = 5 + i + \frac{1}{2-i}$. (10 P.)
- (ii) Skizzieren Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z^2) = 2\}$. (5 P.)

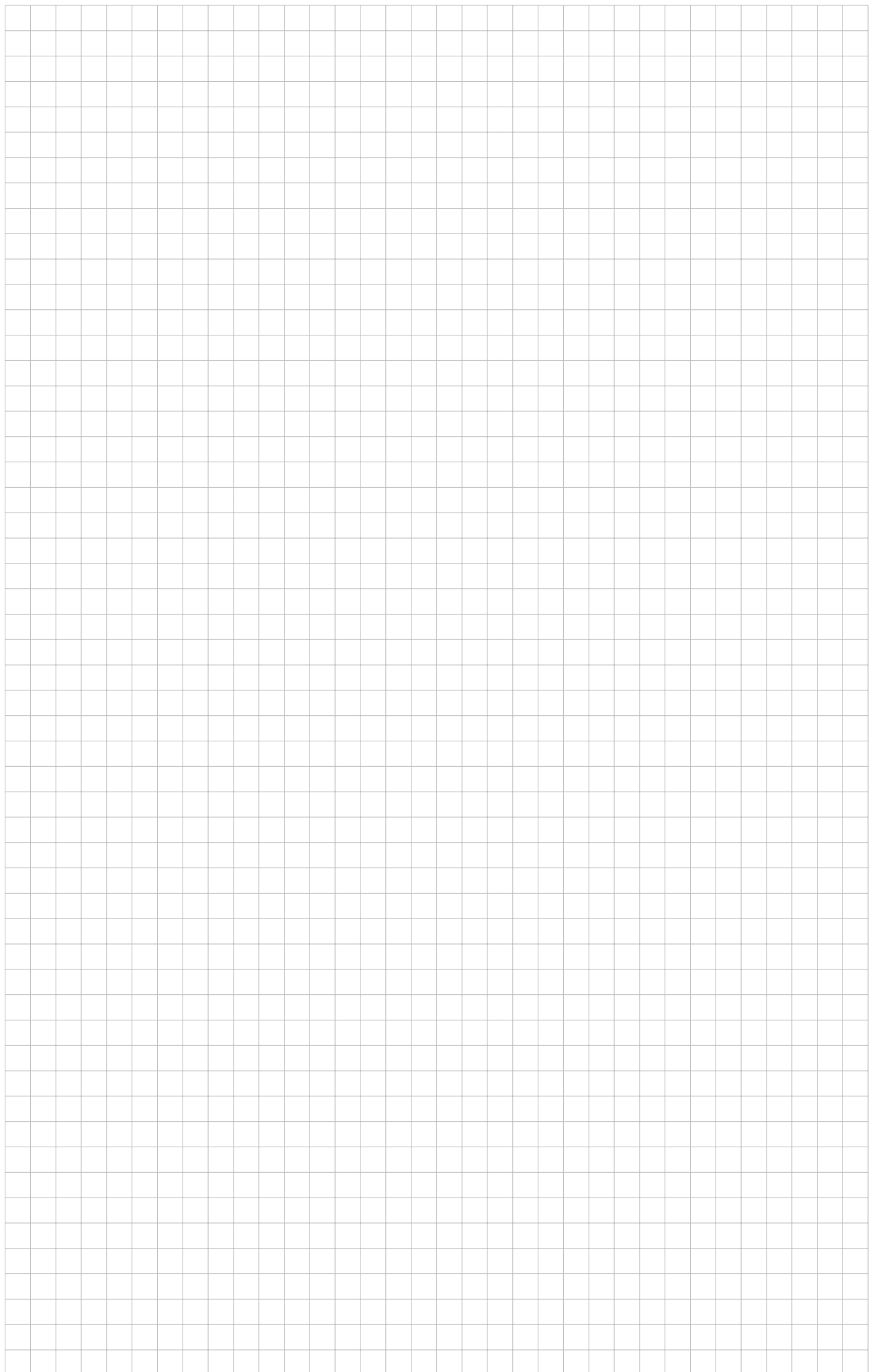




Aufgabe 2: (20 Punkte)

- (i) Entscheiden Sie, ob die Folge $((-1)^n \frac{n^2+3}{n^3\sqrt{n}} + \sqrt[n]{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. (5 P.)
- (ii) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{2} - 1) \cdot (-1)^k$ konvergiert. (5 P.)
- (iii) Zeigen Sie, dass $\sqrt[k]{2} - 1 = e^{\ln(2)/k} - 1 > \frac{\ln(2)}{k}$ und dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{2} - 1)$ divergiert. (5 P.)
- (iv) Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{2} - 1)z^k$. (*Hinweis:* (ii) und (iii) könnten hilfreich sein.) (5 P.)



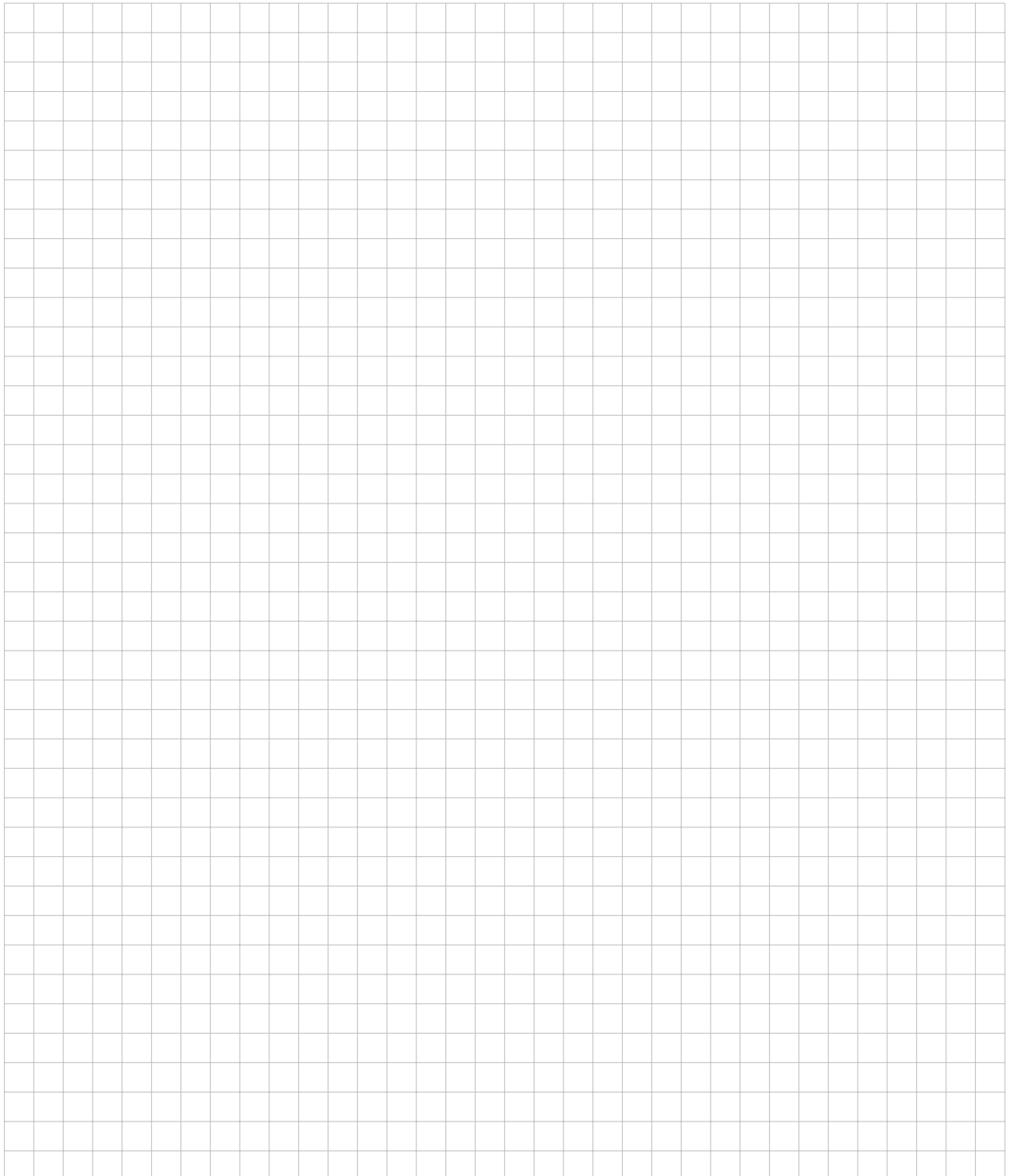


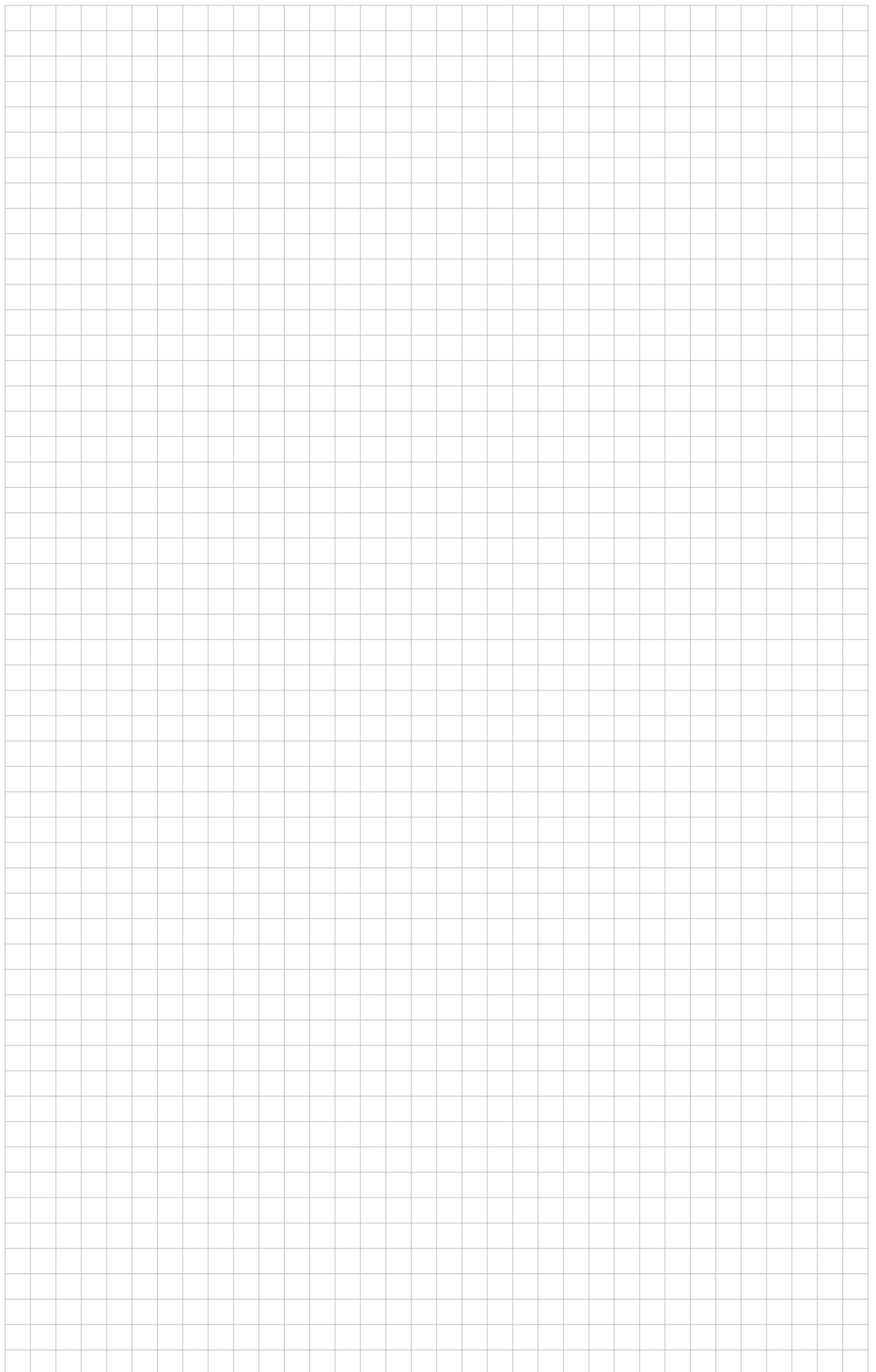
Aufgabe 3: (20 Punkte)

Es sei $p(x) = (x-1)(x+3) = x^2 + 2x - 3$ ein Polynom und $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x - \frac{p(x)}{p'(x)} = x - \frac{x^2 + 2x - 3}{2x + 2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

- (i) Zeigen Sie $f(x) < x$ für alle $x > 1$. (6 P.)
- (ii) Zeigen Sie $1 < f(x)$ für alle $x > 1$. (6 P.)
- (iii) Wir betrachten die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegeben durch $x_0 := 2$ und $x_{n+1} := f(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert. (8 P.)



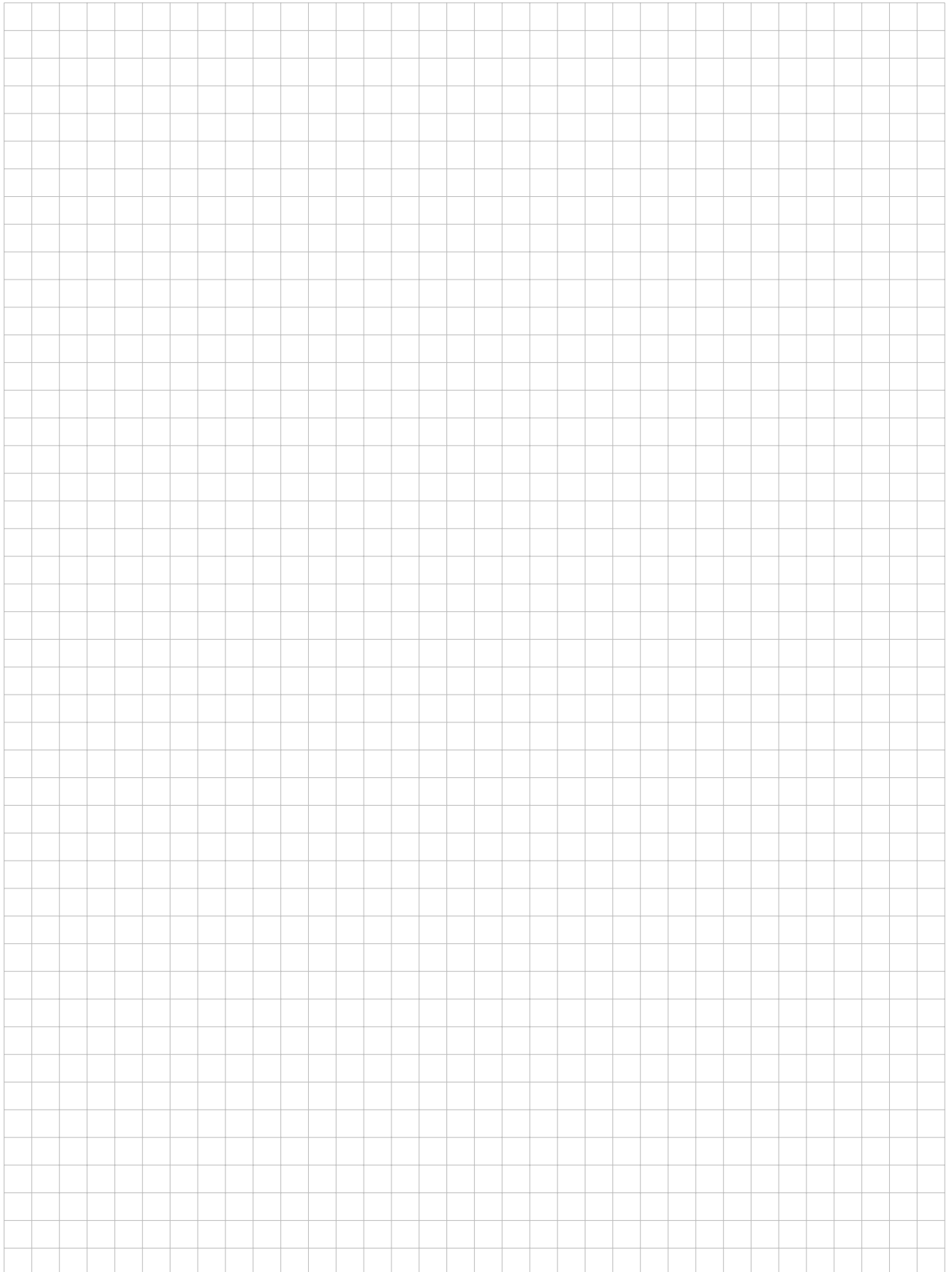


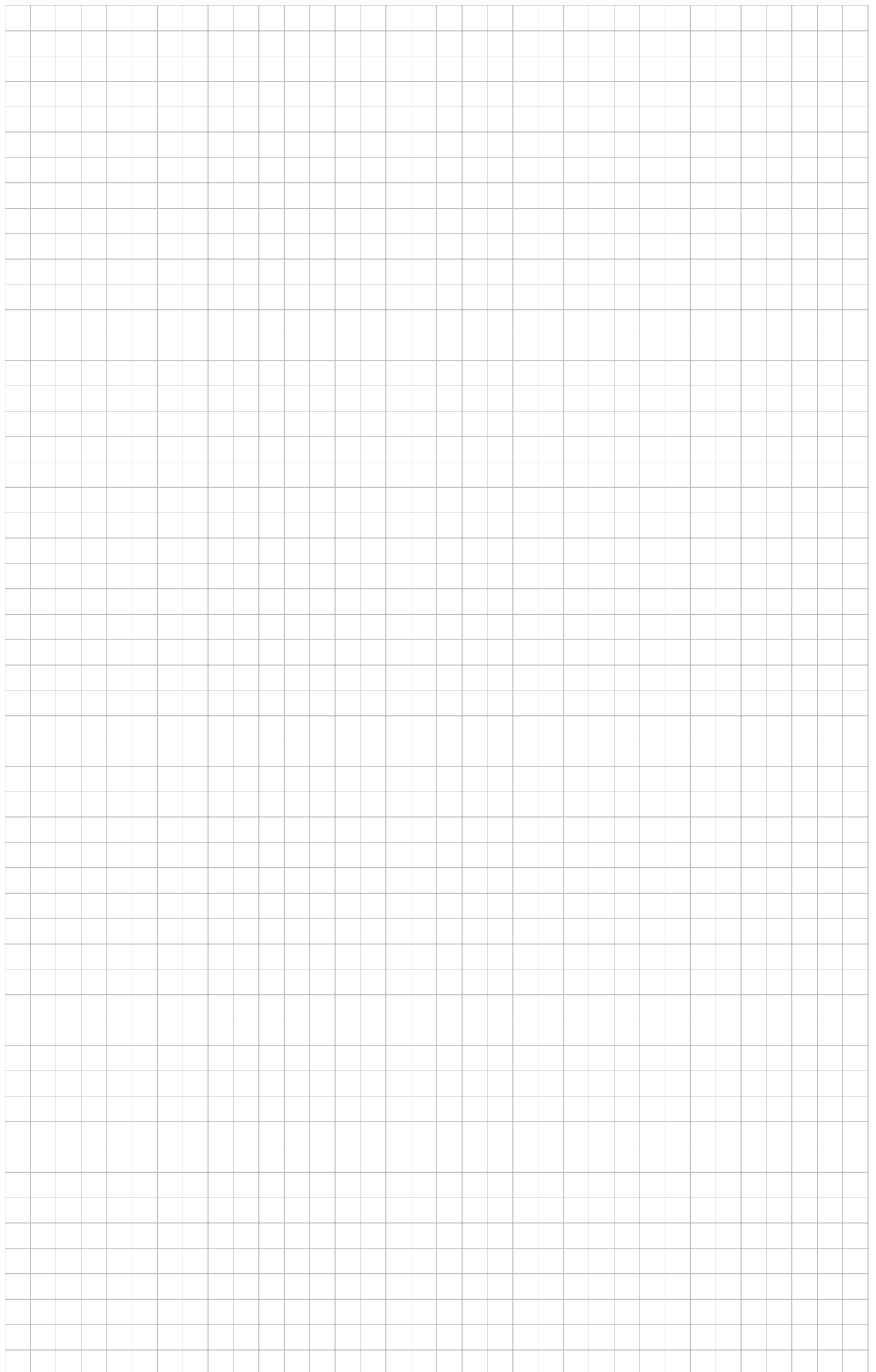
Aufgabe 4: (15 Punkte)

Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f: [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x + 1) \cdot e^{2x^2 - x}.$$

(15 P.)





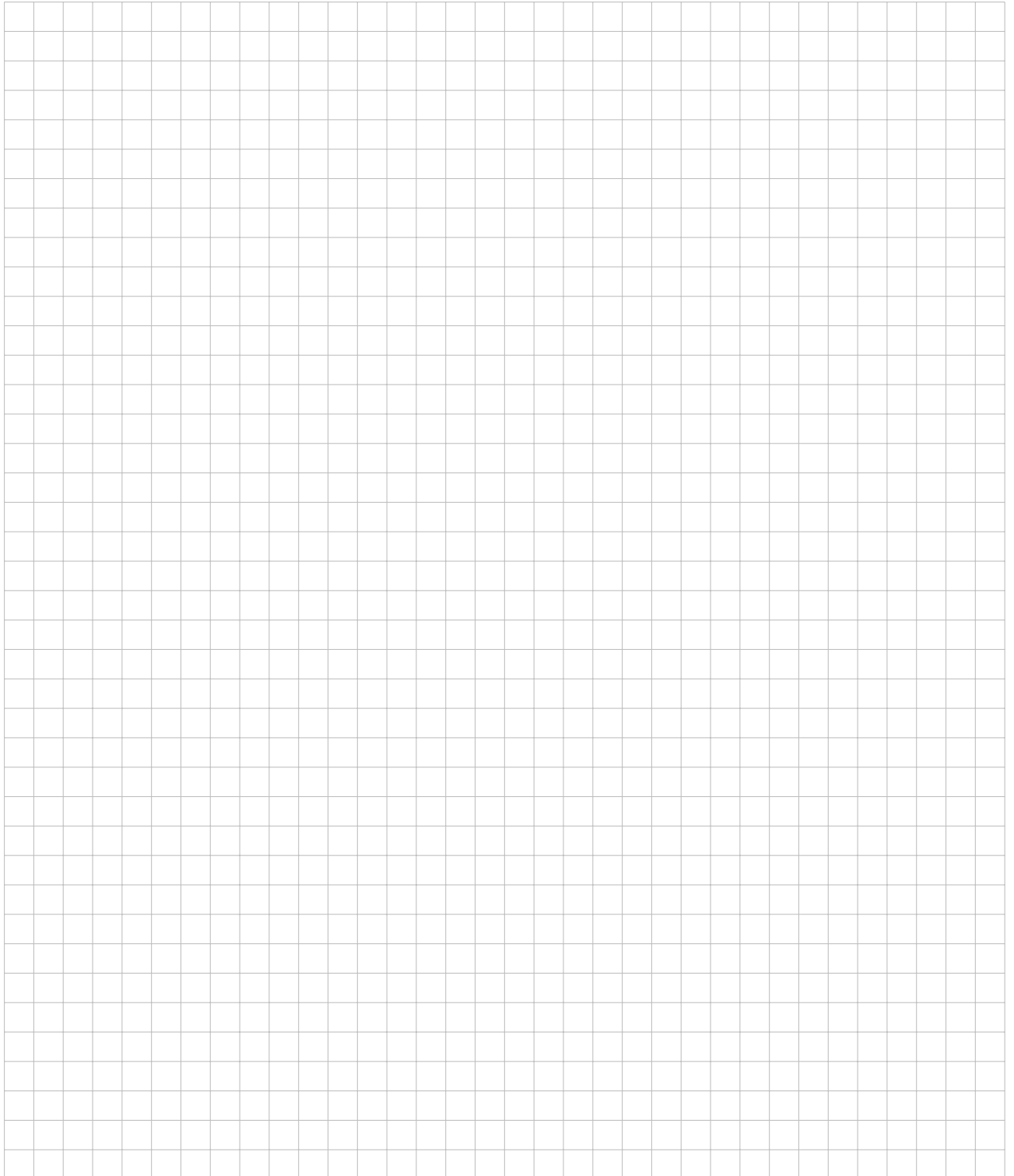
Aufgabe 5: (15 Punkte)

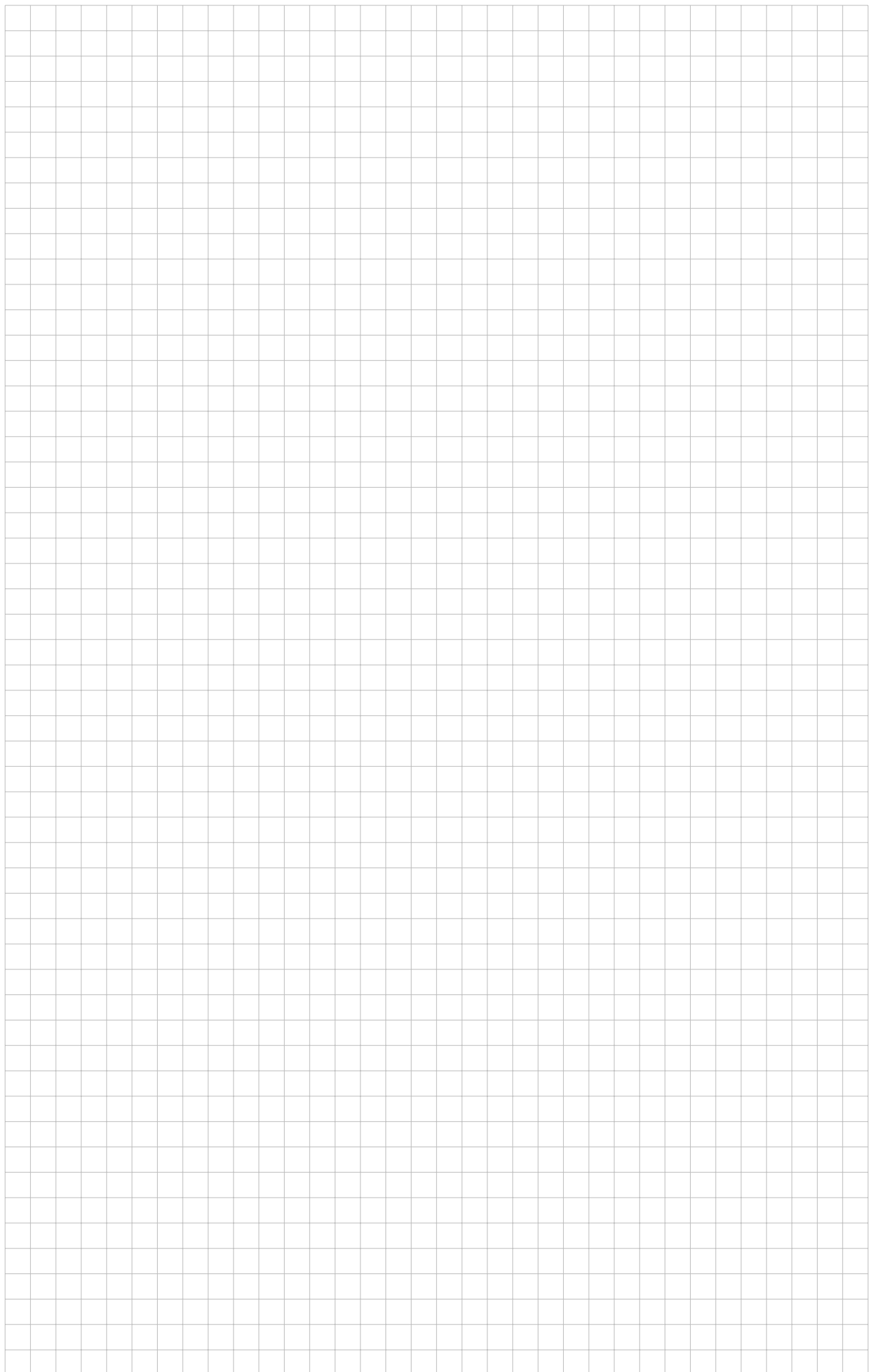
Es sei die Abbildung $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto x \ln(x)$.

- (i) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist, bestimmen Sie die Ableitung f' und zeigen Sie, dass f' streng monoton wachsend ist. (6 P.)
- (ii) Es sei $c > 1$ beliebig. Zeigen Sie, dass

$$|f(x) - f(y)| \leq \ln(c) \cdot |x - y|$$

für alle $x, y \in (\frac{1}{ec}, \frac{c}{e})$. (*Hinweis:* Wenden Sie den Mittelwertsatz an.) (9 P.)





Aufgabe 6: (15 Punkte)

Berechnen Sie

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{1 - \cos(x)} dx.$$

(*Hinweis:* Substitution mit $u = \tan(x/2)$; es darf benutzt werden, dass $\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ und dass $\arctan'(u) = \frac{1}{1+u^2}$.) (15 P.)

