

Analysis für Informatik Probeklausur

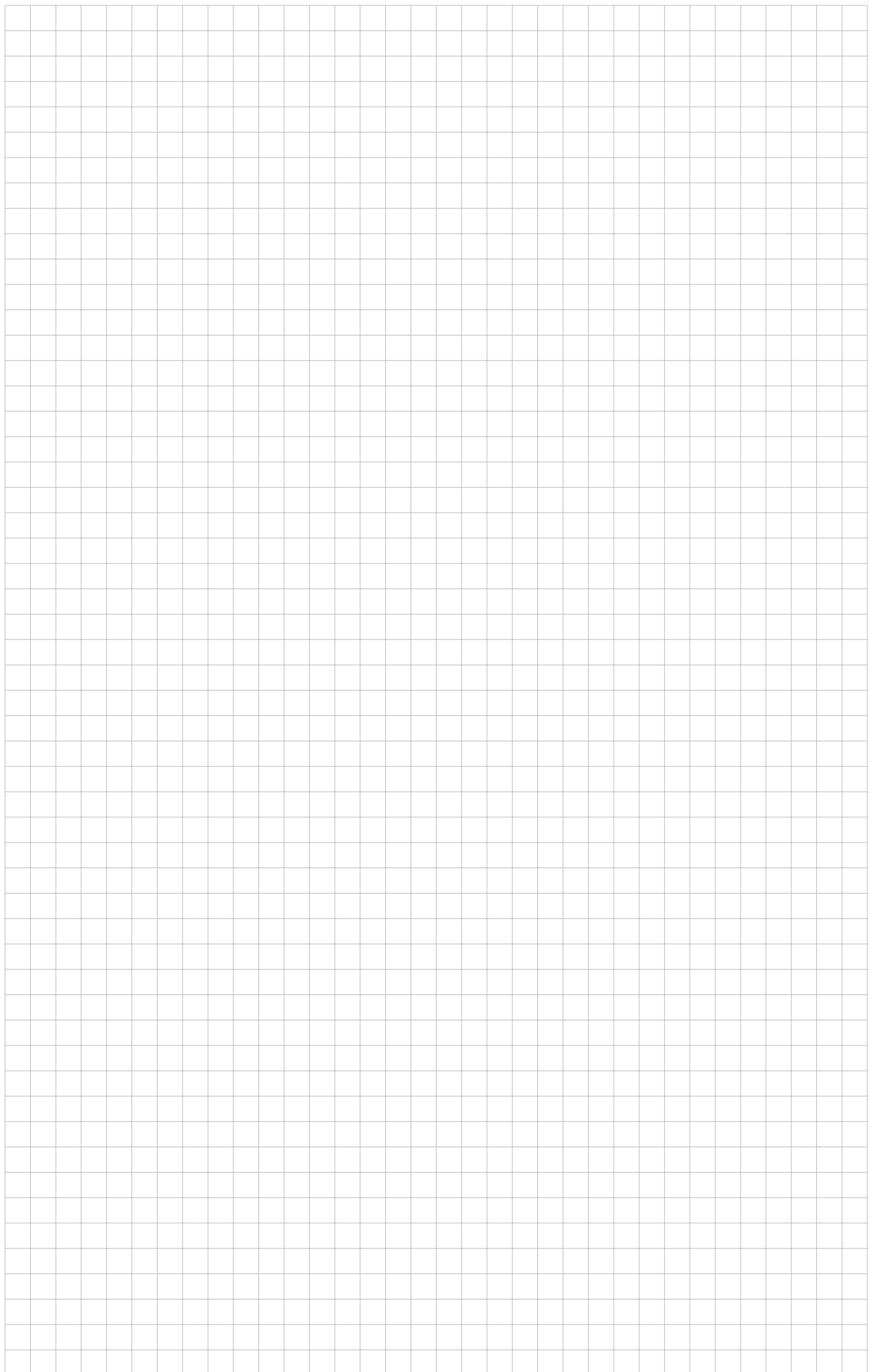
Name:

Matrikelnummer:

Wichtige Informationen:

- Bitte halten Sie einen Lichtbildausweis zur Kontrolle auf Ihrem Platz bereit.
- Als Hilfsmittel ist alles in Papierform erlaubt. Elektronische Hilfsmittel sind nicht erlaubt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausur besteht aus sechs Aufgaben mit insgesamt 100 Punkten.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein. Begründen Sie alle Ihre Antworten!

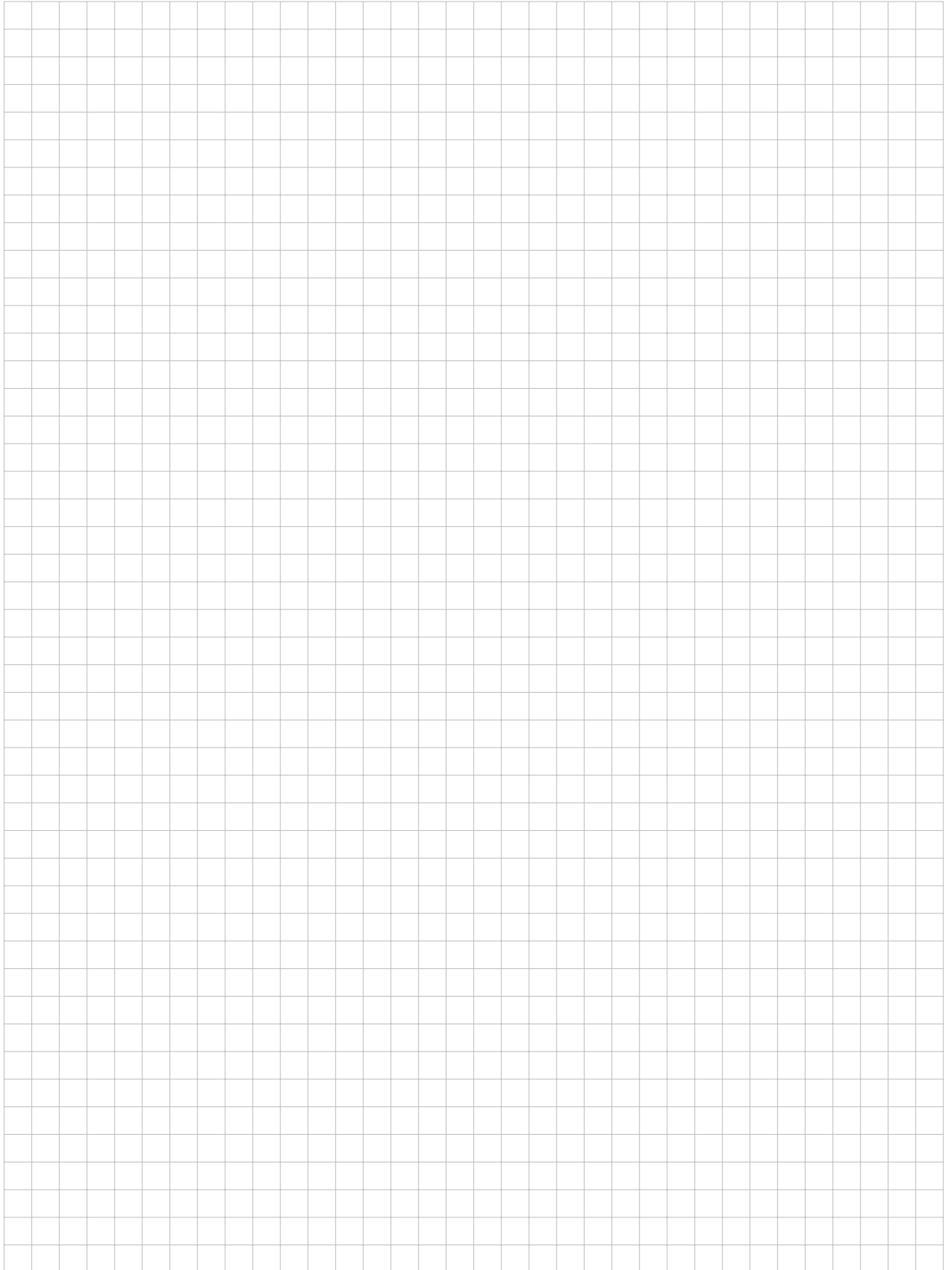
1	2	3	4	5	6	Summe



Aufgabe 1: (15 Punkte)

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$ und $|z|$ von $z = \sqrt{3}e^{2+i\pi/4}$. (9 P.)

(b) Skizzieren Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = \bar{z}^2\}$. (6 P.)





Aufgabe 2: (20 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 2}{x^2 + 1} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

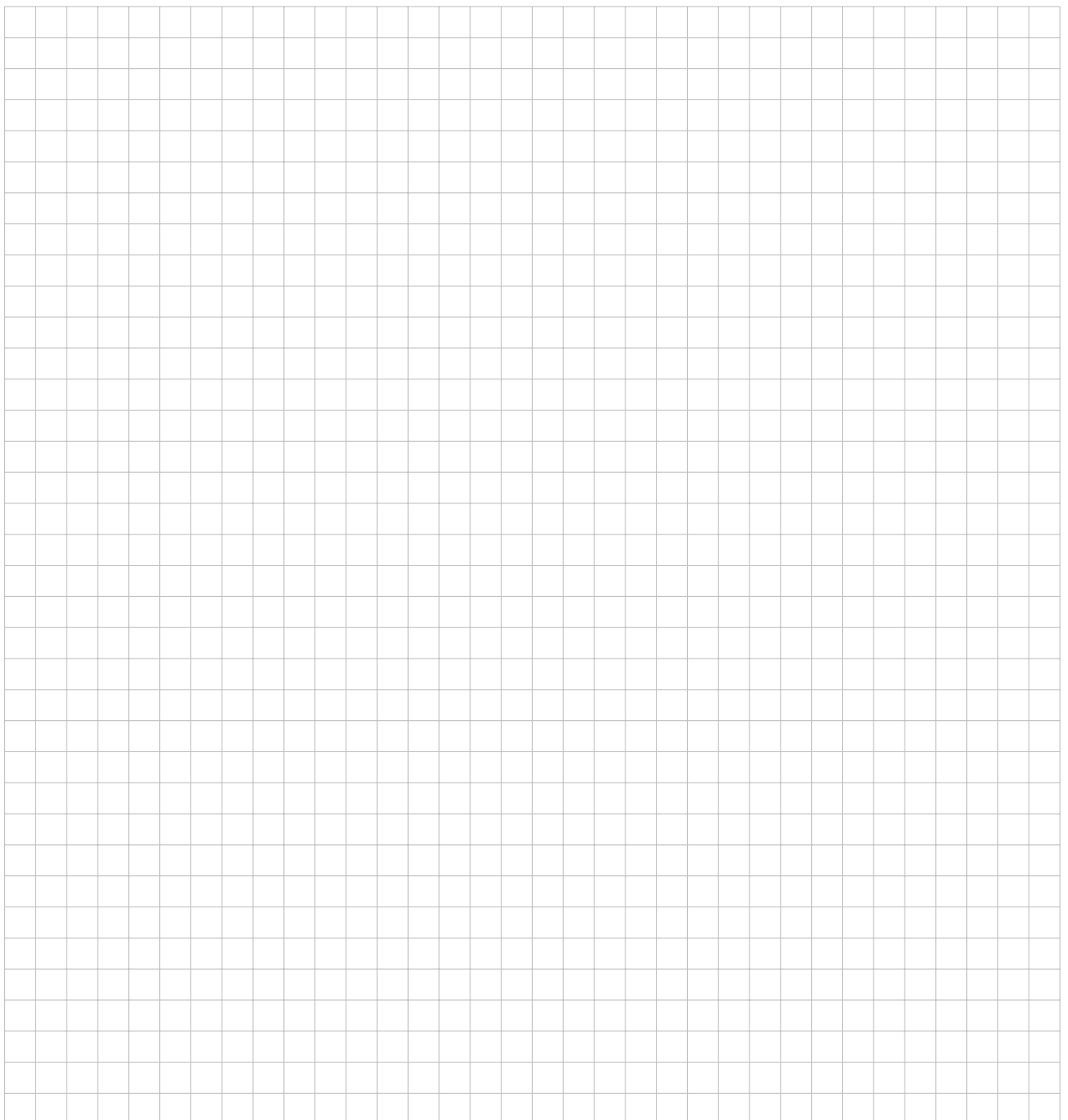
$$f(x) = 1 + \frac{(x^2 - 1)(x - 1)}{x^2 + 1} \quad \text{und} \quad f(x) = x + \frac{-2x + 2}{x^2 + 1}.$$

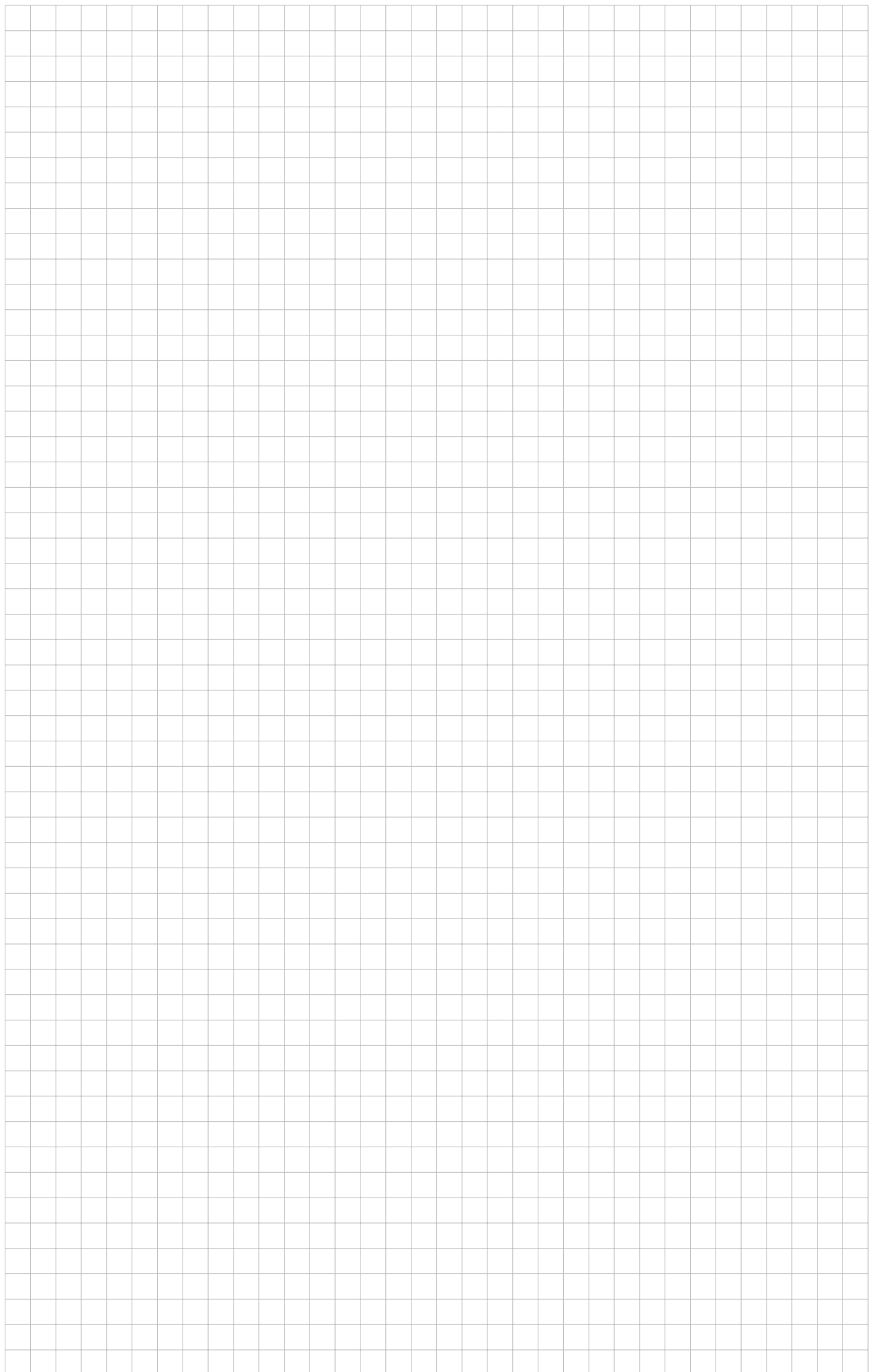
(7 P.)

(b) Folgern Sie, dass $1 < f(x) < x$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>1}$.

(6 P.)

(c) Wir betrachten die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegeben durch $x_0 := 100$ und $x_{n+1} := f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert. (7 P.)



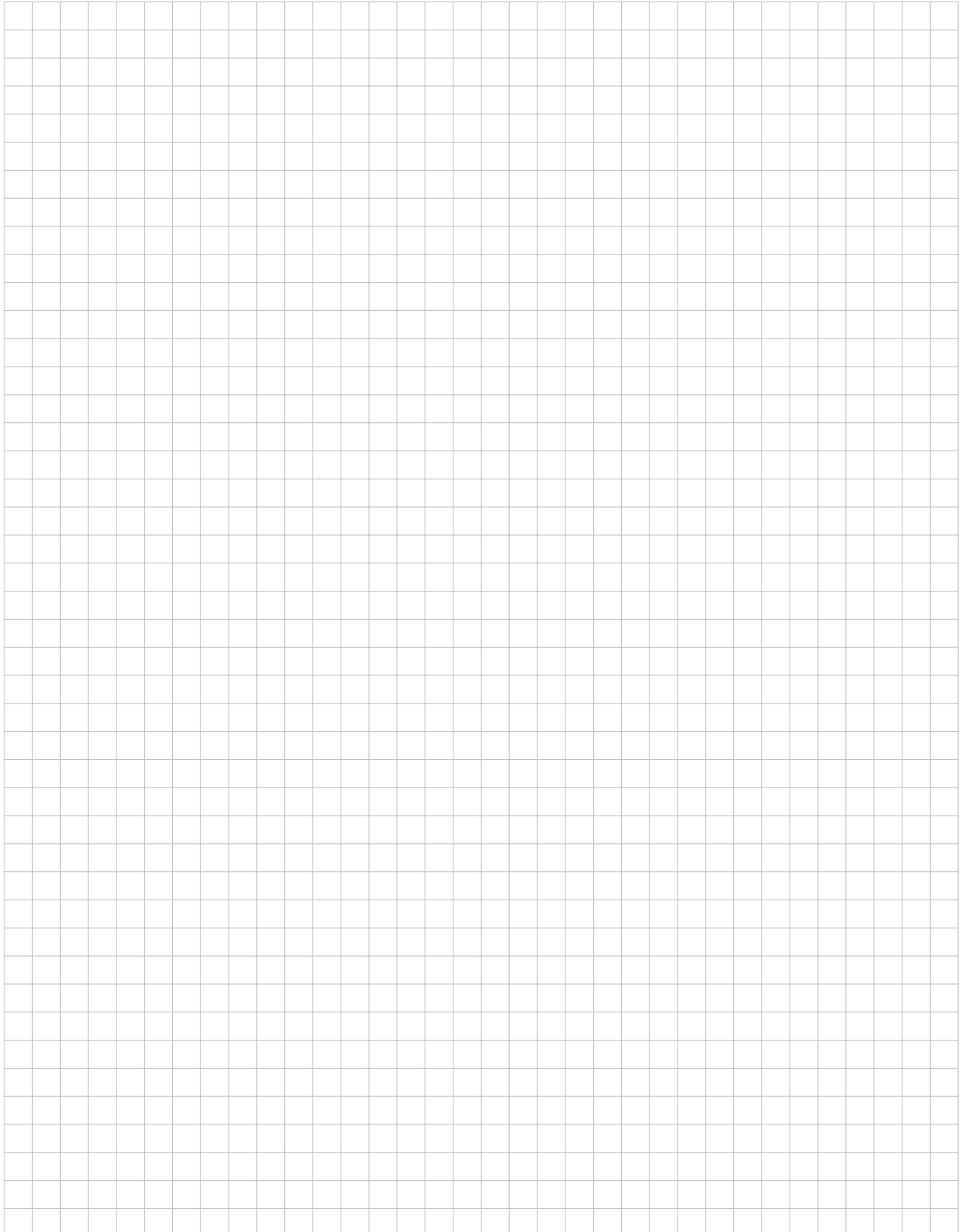


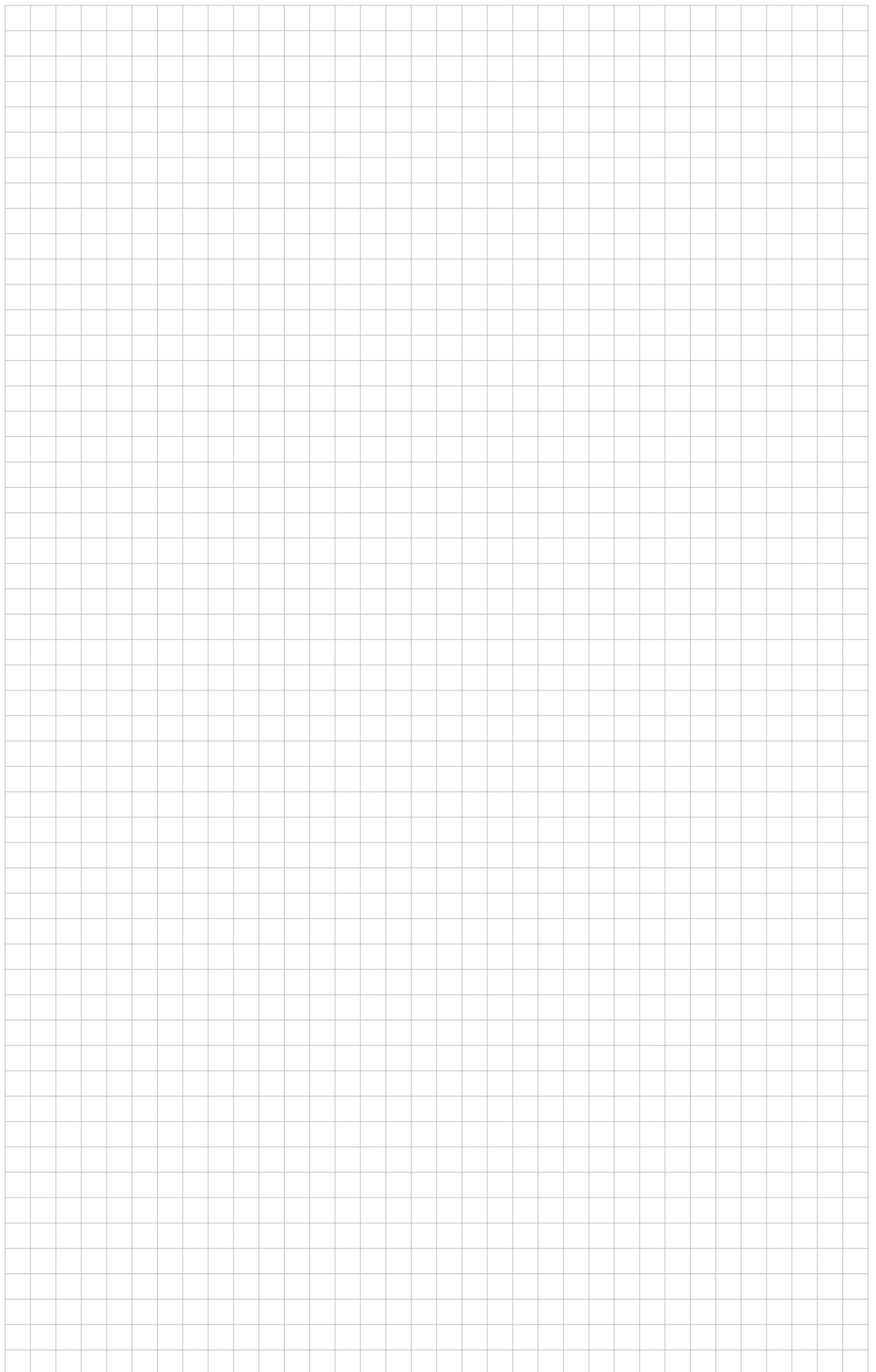
Aufgabe 3: (20 Punkte)

(a) Entscheiden Sie, ob die Folge $(\sin(e^{1/n}\pi))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. (6 P.)

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \cdot z^n$. (8 P.)

(c) Entscheiden Sie, ob die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2) \cdot 3^k}{(k+1)^k}$ konvergiert. (6 P.)



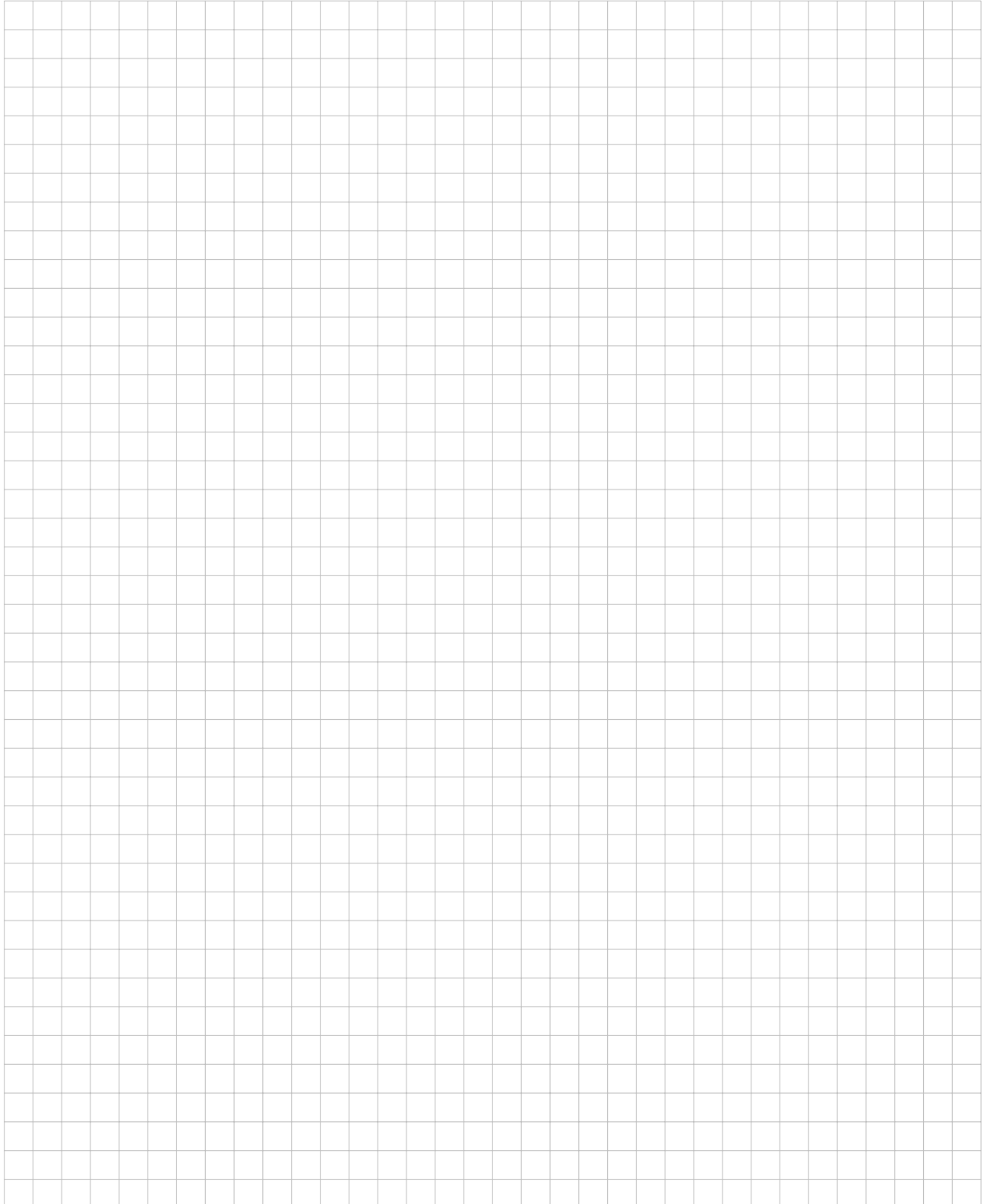


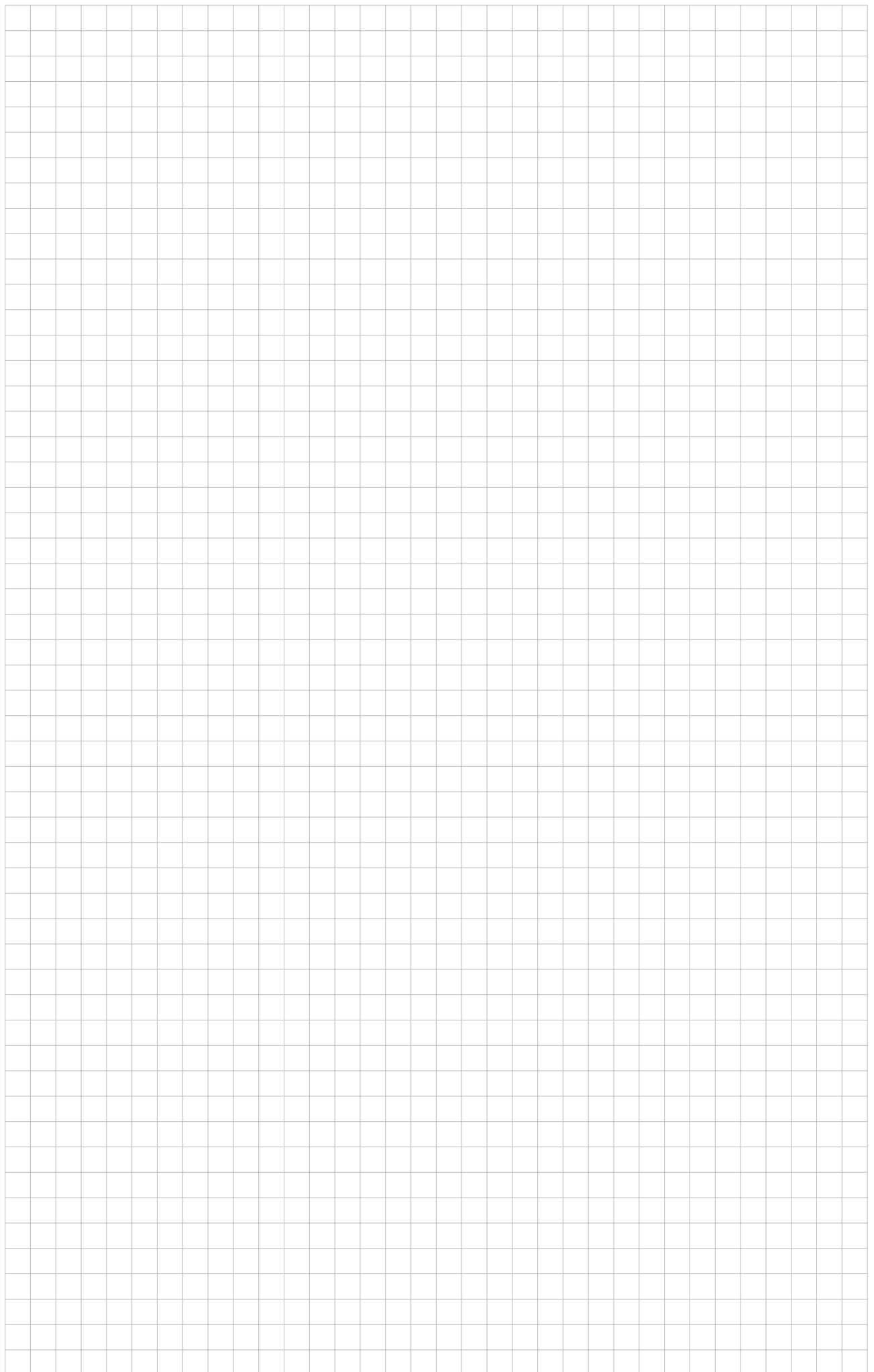
Aufgabe 4: (20 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f: [-10, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sinh(x)}, & \text{falls } x > 0 \\ \frac{x}{x^2 + 1} + 1, & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass $\sinh(x) - x \cosh(x) < 0$ für alle $x > 0$. (*Hinweis:* Zeigen Sie, dass die Ableitung negativ ist.) (7 P.)
- (b) Prüfen Sie, ob f stetig bzw. differenzierbar in $x_0 = 0$ ist. (6 P.)
- (c) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema von f . (7 P.)





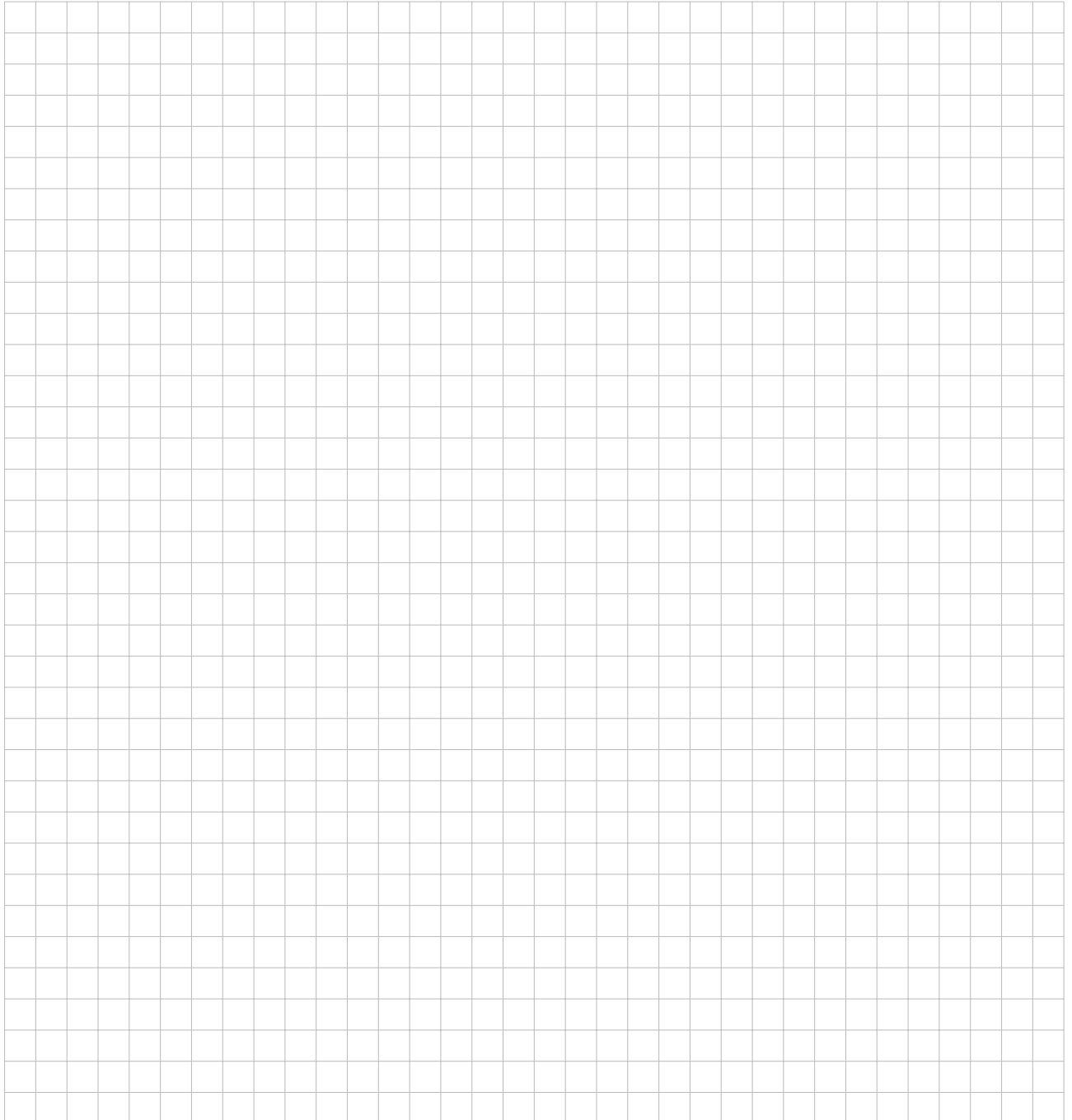
Aufgabe 5: (10 Punkte)

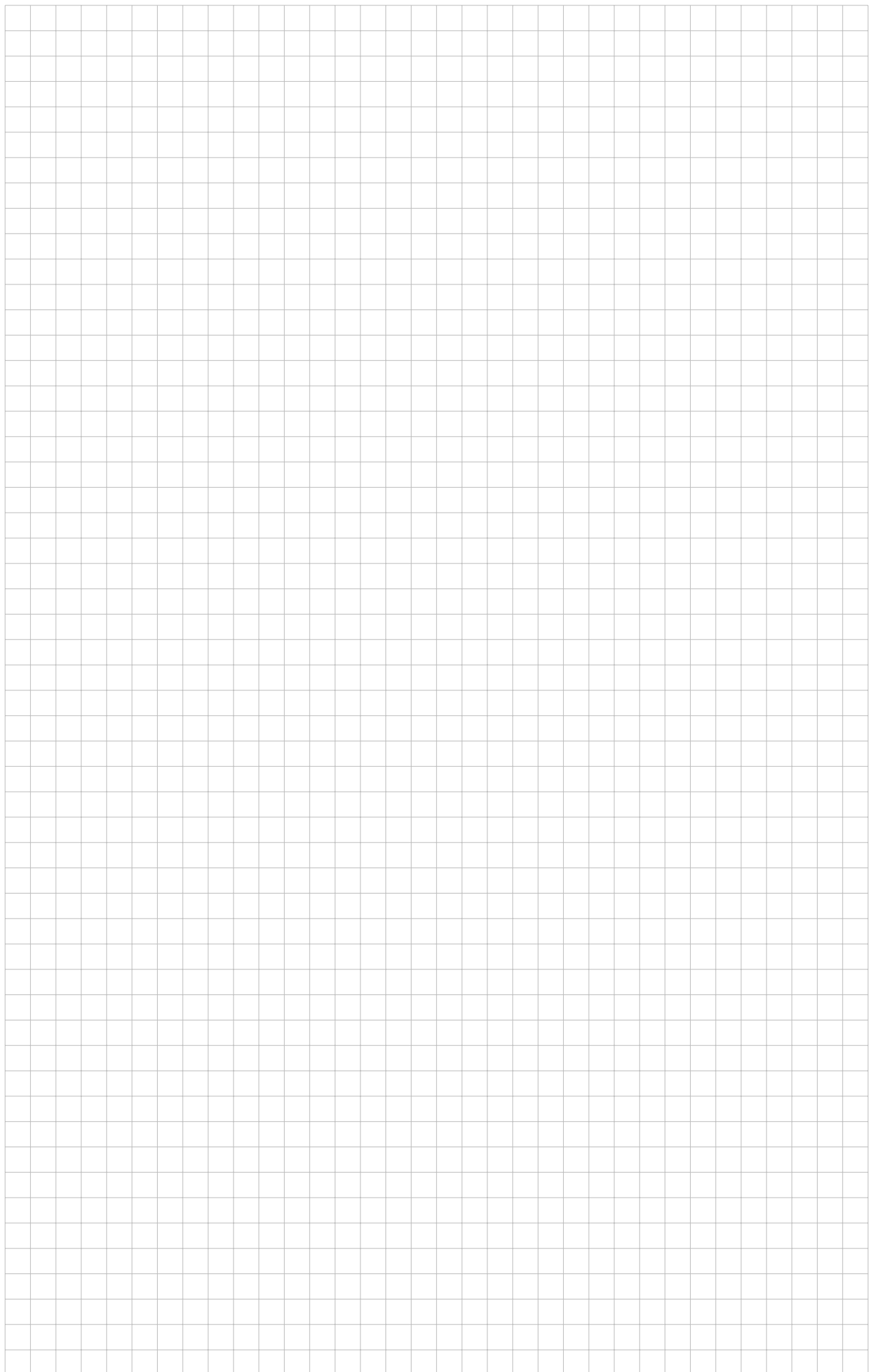
Überprüfen Sie die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 - \sin(x)}{x^2}, & \text{falls } x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

(10 P.)





Aufgabe 6: (15 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

stetig ist.

(6 P.)

(b) Berechnen Sie

$$\int_0^1 x^2 \ln(x) \, dx.$$

(9 P.)

