

Analysis für Informatiker

10. Hausaufgabenblatt

Hausaufgabe 10.1 Welche der folgenden Grenzwerte existieren (in \mathbb{R} oder als uneigentliche Grenzwerte $\pm\infty$)? Geben Sie den Grenzwert, falls er existiert, an. Begründen Sie Ihre Antwort.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, wobei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ (Hinweis: aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$)
2. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, wobei $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin(x)}{x^2}$
3. $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$, wobei $h : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sinh\left(\frac{1}{x-3}\right)}{\cosh\left(\frac{1}{x-3}\right)}$
4. $\lim_{x \uparrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
5. $\lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln(x^2)}{x}$
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cos(x) - 4$
7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sinh(x)}{x}$
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ix^2 + x + 1}{-x^2 + 5x + 1}$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ (wobei $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig ist), $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, wobei

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^3 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

(Hinweis: Verwenden Sie, dass $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$, wobei \overline{A} den Abschluss einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ bezeichnet.)

Hausaufgabe 10.2

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = \infty$$

und

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = (-1)^n \infty.$$

2. Sei $c \in \mathbb{C}, D \subseteq \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{C}$ und $x_0 \in D$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$$

genau dann wenn

$$f(x_0) = c \wedge \lim_{x \uparrow x_0} f(x) = c \wedge \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = c.$$

Hausaufgabe 10.3 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) > a$ und $f(b) < b$. Zeigen Sie, dass ein $x \in (a, b)$ existiert mit $f(x) = x$ (Hinweis: Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf die Abbildung $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - x$ an).

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Samstag den 07.01.2024, 23.59 Uhr in Panda.