

# Analysis für Informatiker

## 11. Hausaufgabenblatt

**Hausaufgabe 11.1** Zeigen Sie mit Hilfe der Ableitungsregeln, dass die folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie deren Ableitung.

(Hinweis: Die Differenzierbarkeit der Wurzelfunktion  $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  mit Ableitung  $\sqrt{\cdot}' : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$  darf verwendet werden (siehe Präsenzaufgabe 10.3))

1.  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
2.  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
3.  $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x^4 - x^3 + 1) \sin(x) e^{\sqrt{x}}$
4.  $g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{x^4 + x^2 + 1}$ .
5.  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2 + x^2 + \sin(x)^2}}$

**Hausaufgabe 11.2** Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x|x|$$

differenzierbar ist. Zeigen Sie anschließend, dass die Ableitung  $f'$  stetig, aber nicht differenzierbar ist.

**Hausaufgabe 11.3** In der Vorlesung wird gezeigt werden, dass  $\log : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar ist.

Berechnen Sie, indem Sie verwenden, dass  $\log$  differenzierbar ist, die Ableitung  $\log' : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  (Hinweis: Da  $\log$  die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist, gilt  $e^{\log(x)} = x$  für alle  $x > 0$ . Differenzieren Sie nun beide Seiten dieser Identität mit Hilfe der Kettenregel).

**Hausaufgabe 11.4** Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

unendlich oft differenzierbar ist mit  $f^{(n)}(0) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

(Hierbei bezeichnet  $f^{(n)}$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) die  $n$ -te Ableitung von  $f$ , also  $f^{(0)} := f$  und  $f^{(n+1)} := (f^{(n)})'$  für  $n \in \mathbb{N}_0$ ).

---

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Sonntag den 14.01.2024, 23.59 Uhr in Panda.