Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

12. Hausaufgabenblatt

Hausaufgabe 12.1 Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie deren Ableitung.

1. $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^x$
2. $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{\sqrt{x}}$
3. $h : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \log(\sin(x^{\sqrt{x}} + x^x)^4 + 1)$

Hausaufgabe 12.2

1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a, b) mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Zeigen Sie, dass f konstant ist mit

   $$f(x) = f(a) = f(b)$$

   für alle $x \in [a, b]$.

   (Hinweis: Mittelwertsatz)

2. Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

   gleich 1 ist.

3. Sei

   $$f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

   und

   $$g : (-\infty, \log(2)) \to (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}, x \mapsto e^x - 1.$$

   Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und dass

   $$f \circ g(x) = x$$

   für alle $x \in (-\infty, \log(2))$ gilt.

   (Hinweis: Berechnen Sie f' indem Sie die Potenzreihe ableiten und benutzen Sie die Formel für die geometrische Reihe. Wenden Sie anschließend die Kettenregel auf $f \circ g$ an und verwenden Sie Hausaufgabe 12.2.1)

4. Folgern Sie aus 3. die Identität

   $$\log(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

   für jedes $x \in (-1, 1)$.

Hausaufgabe 12.3 Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x + \sum_{k=1}^{24} x^{2k+1}$$

1. Zeigen Sie, dass f bijektiv, streng monoton wachsend und differenzierbar ist.
2. Folgern Sie, dass die Umkehrfunktion von f differenzierbar ist und bestimmen Sie
$$(f^{-1})'(1).$$

Hausaufgabe 12.4 Untersuchen Sie die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{x^4 + 1}$$

und

$$g : \left[-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{x^4 + 1}$$

auf lokale und globale Maxima und Minima (Begründen Sie Ihre Antwort).

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Sonntag den 21.01.2024, 23.59 Uhr in Panda.