Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

13. Hausaufgabenblatt

Hausaufgabe 13.1 Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \begin{cases} \sin(1/x) & x \in [-2/\pi, 2/\pi] \setminus \{0\} \\ e^{|x|} + 5 & |x| > 2/\pi \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

auf lokale und globale Maxima und Minima. Begründen Sie Ihre Antworten.

Hausaufgabe 13.2

1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Bestimmen Sie, dass n-te Taylorpolynom von $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Entwicklungspunkt $x = 0$. Zeigen Sie zudem, dass für das n-te Restglied $(R_n \sin)(x, 0)$ von sin in $x = 0$ die Abschätzung

$$|(R_n \sin)(x, 0)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Folgern Sie, dass $\sin(x) = \lim_{n\to\infty}(T_n \sin)(x, 0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

2. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}_0$, das n-te Taylorpolynom von log im Entwicklungspunkt $x = 1$ gegeben ist durch

$$(T_n \log)(x, 1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k.$$

Zeigen Sie anschließend, dass $\log(x) = \lim_{n\to\infty}(T_n \log)(x, 1)$ für alle $x \in (0, 2)$ gilt (Hinweis: Langrangsches Restglied oder wenden Sie Hausaufgabe 12.2 an).

3. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Bestimmen Sie das n-te Taylorpolynom $(T_n f)(x, 0)$ im Entwicklungspunkt $x = 0$ der unendlich oft differenzierbaren Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie zudem, dass $T_n f(x, 0)$ für $x \neq 0$ und $n \to \infty$ nie gegen $f(x)$ konvergiert (Hinweis: Verwenden Sie Präsenzaufgabe 10.4.).

Hausaufgabe 13.3 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3(x)\cos(x)\sin(e^x - 1)}{x^2 + x + e^x - 1}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)^2 \sinh(x)}{(e^x - 1)^2 x}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x^4 + 2x}$
4. $\lim_{x\downarrow 0} x^2 \log(x)$

Bonusaufgabe (25 Punkte): Sei $f : U \to \mathbb{R}$ mit

1. $U = \mathbb{R}$, $f(x) = 9x^3 - 4x^2 + \frac{1}{2}x - 1$
2. $U = \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = e^{3x^2}x + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x}$
3. $U = \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$, $f(x) = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(x-1)-\sqrt{x^3}}{(x-1)^2}$
4. $U = \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = \log(x)$
5. $U = \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - 2\sin(x)^2$

Bestimmen Sie für jede der oben angegebenen Funktionen jeweils eine differenzierbare Funktion $F : U \to \mathbb{R}$ mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Sonntag den 28.01.2024, 23.59 Uhr in Panda.