Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

2. Hausaufgabenblatt

Hausaufgabe 2.1 Zeigen Sie den binomischen Lehrsatz:

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}$$

für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ (Hinweis: Verwenden Sie Induktion über n).

Hausaufgabe 2.2 Zeigen Sie

1. für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$.
2. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0$.
3. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j!} \prod_{i=0}^{j-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \right).$$

Berechnen Sie diesen Ausdruck für $n = 3$ zweimal: einmal mit Hilfe der Formel auf der linken Seite und einmal mit Hilfe der Formel auf der rechten Seite.

(Hinweis: in ein paar Wochen wird in der Vorlesung gezeigt, dass sich die Zahl $(1+1/n)^n$ für große $n \in \mathbb{N}$ der eulerschen Konstante e beliebig nah annähert.)

Hausaufgabe 2.3 Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper und $x, y, z, v, w \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie folgende Aussagen

1. $x < y \iff -x > -y$
2. $x < y \wedge z > 0 \Rightarrow xz < yz$
3. $x < y \wedge z < 0 \Rightarrow xz > yz$
4. $x > 1 \iff 0 < x^{-1} < 1$
5. $x < v, y < w \Rightarrow x + y < v + w$.

Hausaufgabe 2.4 Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{Q}$ mit $x > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die Ungleichung

$$(1+x)^n > \binom{n}{2} x^2 \geq \frac{n^2}{4} x^2$$

gilt. (Hinweis: Benutzen Sie den binomischen Lehrsatz und die Annahme $x > 0$ für die erste Ungleichung und die Annahme $n \geq 2$ für die zweite Ungleichung.)

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Sonntag den 05.11.2023, 23.59 Uhr in Panda.