Universität Paderborn Wintersemester 23/24
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Analysis für Informatiker

3. Hausaufgabenblatt

Hausaufgabe 3.1 Sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b > 1$ Nach Präsenzaufgabe 2.1.3, besitzt jede Zahl $x \in \mathbb{N}_0$ eine eindeutige Darstellung der Form

$$x = \sum_{i=0}^{N} c_i b^i = c_0 + c_1 b + \cdots + c_N b^N$$

mit einem $N \in \mathbb{N}_0$ und $c_i \in \{0, \ldots, b-1\}$ für alle $i \in \{0, \ldots, N\}$. Finden Sie diese Darstellungen für die (Dezimal-) Zahlen $x = 7$ und $x = 579$ für

1. $b = 2$
2. $b = 3$
3. $b = 5$.

Hausaufgabe 3.2 Bestimmen Sie falls existent Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (in $\mathbb{R}$) der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$.

1. $M_1 = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}, n < 0, m \leq -n\}$
2. $M_2 = \left\{\frac{1}{n^3} : n \in \mathbb{N}\right\}$
3. $M_3 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 2, x > 0\}$
4. $M_4 = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \geq 2, x > 0\}$

(Hinweis: Es darf benutzt werden, dass zwischen zwei unterschiedlichen reellen Zahlen immer eine rationale Zahl liegt.)

Hausaufgabe 3.3 (Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel)

Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n \geq \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

Hinweis: Benutzen Sie vollständige Induktion. Für den Induktionsschritt kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x_{n+1} \geq x_i$ für $i = 1, \ldots n$ und dass alle x_i ungleich Null sind. Zeige mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1} x_i}{(n+1)x_a}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x_{n+1} - x_a}{(n+1)x_a}\right)^{n+1} \geq \frac{x_{n+1}}{x_a},$$

wobei x_a das aritmetische Mittel $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ ist. Zeige anschließend, dass

$$\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)^{n+1} \geq \prod_{i=1}^{n+1} x_i.$$

Hausaufgabe 3.4 Zeigen Sie die folgenden Identitäten in $\mathbb{R}$.

1. $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}\right)^{48} = 8$
2. $\sqrt[9]{\sum_{j=0}^{18} \binom{18}{j} 2^j} = 9$
3. $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{216}} + \left(\frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[2]{25}}\right)^{-1}\right)^2} = 1$
4. $\left(\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^j\right)^2 = \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{3}{2}-\sqrt{2}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Sonntag den 12.11.2023, 23.59 Uhr in Panda.