Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

6. Hausaufgabenblatt

Hausaufgabe 6.1 Entscheiden Sie, welche der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

1. $a_n := \frac{1}{\sqrt{n^3}} \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{3}+7+\frac{8}{n}} + \frac{7n^2+n+7}{n^2+3n+1}$
2. $a_n := (-1)^n \frac{7n^7-4}{n^7+n+1}$
3. $a_n := \sqrt[n]{a^n+b^n}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $0 < a \leq b$.
4. $a_n = (-1)^n \left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right) + (-1)^{n+1} \sqrt[n]{n}$

Hausaufgabe 6.2 Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

konvergiert.

(Hinweis: Verwenden Sie den binomischen Lehrsatz um zu zeigen, dass

$$a_n = 2 + \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zeigen Sie anschließend die Ungleichung $\binom{n}{j}\frac{1}{n^j} \leq \frac{1}{j(j-1)} = \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $j \geq 2$ und folgern Sie

$$a_n = 2 + \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} \leq 3 - \frac{1}{n} < 3.$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie danach, zum Beispiel mit der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel (Hausaufgabe 3.3), dass $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und verwenden Sie anschließend den Satz der monotonen Konvergenz.

Hausaufgabe 6.3 Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, wobei

$$a_0 \in \mathbb{R}$$

und

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$.

1. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert, falls $0 \leq a_0 \leq \frac{1}{2}$.

2. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergiert, falls $a_0 > \frac{1}{2}$. (Hinweis: Zeigen Sie, dass $a_n \geq a_0 + n(a_0 - \frac{1}{2})^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.)
3. Welches Konvergenzverhalten hat die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für $a_0 < 0$?

Hausaufgabe 6.4 Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{C}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge $\Rightarrow$ $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge
2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt $\Rightarrow$ $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt
3. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt
4. $|a_n| < |a_{n+1}| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Sonntag den 03.12.2023, 23.59 Uhr in Panda.