Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

7. Hausaufgabenblatt

Hausaufgabe 7.1 Man überprüfe die folgenden Reihen auf Konvergenz:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+17}{n^3+2n^2+n+1}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^4}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2^{-k}}{k^2-3k-1}$
4. $\displaystyle\sum_{k=52}^{\infty} (\sqrt[k]{k}-1)^k$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k(\sqrt[k]{3}-1)$
6. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \prod_{n=1}^{k} \frac{2n}{3n+2}$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{(k^2)}}{k!}$

Hausaufgabe 7.2 Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren und bestimmen Sie den Grenzwert.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ (Partialbruchzerlegung)
2. $\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$.

   (Hinweis: Zeigen Sie per Induktion über $n \in \mathbb{N}$ die Identität

   $$\sum_{k=1}^{n} kz^{k-1} = \frac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2}$$

   für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 1$.)

Hausaufgabe 7.3 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge. Zeigen Sie den *Verdichtungssatz von Cauchy*: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergent ist.

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Sonntag den 10.12.2023, 23.59 Uhr in Panda.