

Analysis für Informatiker

8. Hausaufgabenblatt

Hausaufgabe 8.1 Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

- (a) $\sum_{n=k+1}^{\infty} \binom{n}{k} z^n$ für $k \in \mathbb{N}$,
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^n \frac{2k}{3k+1} \right) z^n$,
- (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{(n^2)}}{n+3} z^n$,
- (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^3 + 2 + (-1)^n}{n^3 + 3} \right)^n z^n$.
- (e) $\sum_{k=0}^{\infty} k! z^k$

Hausaufgabe 8.2 Für $s \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, sei $B_s(z)$ die Binomialreihe

$$B_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} z^k,$$

wobei $\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-k+1)}{k!}$, aus Präsenzaufgabe 7.2.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $s \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$

$$B_s(x) = (1+x)^s$$

gilt (Hinweis: Verwenden Sie Präsenzaufgabe 7.2.2 und 7.2.4).

(b) Berechnen Sie die ersten 5 Summanden der Potenzreihe für $\sqrt{1+x} = B_{\frac{1}{2}}(x)$.

Hausaufgabe 8.3

1. Berechnen Sie die Eulerdarstellungen der komplexen Zahlen $2 - 2i$ und $\frac{1}{3}i$ und die des Produkts $(2 - 2i)\frac{1}{3}i$.
2. Geben Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^{13} = 8192$ in deren Eulerdarstellungen an.
3. Zeichnen Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} : z^3 = 125\}$.

Hausaufgabe 8.4 Zeigen Sie die Identität

$$\sin(x)^3 = \frac{3}{4} \sin(x) - \frac{1}{4} \sin(3x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.