Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

9. Hausaufgabenblatt

Hausaufgabe 9.1 Welche der angegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzen eine konvergente Teilfolge und welche nicht? Begründen Sie ihre Antwort.

(a) $a_n = \sqrt[n]{n!}$ (Hinweis: Zeigen Sie, dass $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, indem Sie $n!^2 \geq n^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ beweisen.)

(b) $a_n = \frac{ne^{i\pi n}+e^{i\sqrt{n}}}{2n+1}$

(c) $a_n = \begin{cases} n! & \text{falls } n = 2^m \text{ für ein } m \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(d) $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$

Hausaufgabe 9.2 Die Funktionen Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus sind definiert durch

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{C}; \qquad z \mapsto \sinh(z) := \frac{1}{2}\big(e^z - e^{-z}\big),$$
$$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{C}; \qquad z \mapsto \cosh(z) := \frac{1}{2}\big(e^z + e^{-z}\big).$$

(a) Beweisen Sie, dass sin,cos,sinh und cosh stetig sind.

(b) Ermittlen Sie Potenzreihendarstellungen für der Funktionen sinh und cosh

(c) Zeigen Sie, dass sinh die Menge $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ abbildet. (Hinweis: Geeignete Substitution verwenden)

(d) Beweisen Sie für $z \in \mathbb{R}$, dass

$$\sin(z)^2 + \cos(z)^2 = 1$$

und

$$\cosh(z)^2 - \sinh(z)^2 = 1.$$

(e) Skizzieren Sie die Graphen der (reellen) Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sinh(x)$ und $x \mapsto \cosh(x)$.

Hausaufgabe 9.3 Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \big(e^{|x|} - 1\big)\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

stetig ist.

Hausaufgabe 9.4 Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

für jedes $a \in \mathbb{R}$ nicht stetig ist.

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Samstag den 23.12.2023, 23.59 Uhr in Panda.