Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 2023–2024

Analysis für Informatiker

Name:

Matrikelnummer:

Wichtige Informationen:

- Als Hilfsmittel ist alles in Papierform erlaubt. Elektronische Hilfsmittel sind nicht erlaubt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausur besteht aus sechs Aufgaben mit insgesamt 100 Punkte.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein. Begründen Sie alle Ihre Antworten!

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Summe**

Aufgabe 1: (15 Punkte)

(a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie den Betrag von $\dfrac{-6i}{3+4i} + 2i$. (5 P.)

(b) Skizzieren Sie die Menge

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - i|^3 \leq 8 \right\}$$

in $\mathbb{C}$. (5 P.)

(c) Skizzieren Sie die Menge

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} : (z - i)^3 = 8 \right\}$$

in $\mathbb{C}$. (5 P.)

Aufgabe 2: (15 Punkte)

(a) Beweisen Sie, dass $0 < \dfrac{\sin(2x)}{2} < x$ für alle $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. (6 P.)

(b) Sei $x_0 = 1$. Wir definieren rekursiv $x_n := \dfrac{\sin(2x_{n-1})}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und bestimmen Sie ihren Grenzwert. (9 P.)

Aufgabe 3: (20 Punkte)

(a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^3+k^2+1} z^k$ absolut konvergent? (8 P.)

(b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

(8 P.)

(c) Bestimmen Sie, ob die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ konvergent ist und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert. (4 P.)

Aufgabe 4: (20 Punkte)
Betrachten Sie die Funktion

$$f : [-2, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{2x^2 + 20}{\sqrt{2x^2 + 6}}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f differentierbar in jedem Punkt in $(-2, \infty)$ ist und bestimmen Sie alle $x \in (-2, \infty)$ mit $f'(x) > 0$. (12 P.)

(b) Bestimmen Sie alle lokale und globale Minima und Maxima der Funktion. (8 P.)

Aufgabe 5: (15 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{|x|}\sin(x)$$

differenzierbar ist mit Ableitung

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(-x)}{2\sqrt{-x}} + \cos(x)\sqrt{-x} & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ \dfrac{\sin(x)}{2\sqrt{x}} + \cos(x)\sqrt{x} & (x > 0) \end{cases}$$

(8 P.)

b) Zeigen Sie, dass f' eine Nullstelle im Intervall $[10^{100}, 10^{100} + 2\pi]$ besitzt. (7 P.)

Aufgabe 6: (15 Punkte)

(a) Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 \left(3e^{-x^2}x + x^8\right) dx$. (7 P.)

(b) Bestimmen Sie, ob das Integral $\int_0^\infty \sin(x)e^{-x}\, dx$ existiert und bestimmen Sie gegebenenfals seinen Wert. (8 P.)

Hinweis: Wenden Sie zweimal partielle Integration auf $I = \int_0^b \sin(x)e^{-x}\, dx$ *an und bestimmen Sie damit eine Gleichung die* I *erfüllt.*