Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 2023–2024

Analysis für Informatiker

Lehramt GyGe/BK mit Fach Informatik nach der neuen PO

Name:

Matrikelnummer:

Wichtige Informationen:

- Als Hilfsmittel ist alles in Papierform erlaubt. Elektronische Hilfsmittel sind nicht erlaubt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausur besteht aus fünf Aufgaben mit insgesamt 100 Punkte.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein. Begründen Sie alle Ihre Antworten!

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**Summe**

Aufgabe 1: (15 Punkte)

(a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie den Betrag von $\dfrac{-6i}{3+4i} + 2i$. (5 P.)

(b) Skizzieren Sie die Menge
$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z-i|^3 \leq 8\}$$
in $\mathbb{C}$. (5 P.)

(c) Skizzieren Sie die Menge
$$D = \{z \in \mathbb{C} : (z-i)^3 = 8\}$$
in $\mathbb{C}$. (5 P.)

Aufgabe 2: (20 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^3 - x + 2}{x^2 + 1}$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass (5 P.)

$$f(x) = 1 + \frac{(x^2 - 1)(x - 1)}{x^2 + 1} \quad \text{und} \quad f(x) = x + \frac{-2x + 2}{x^2 + 1}.$$

(b) Folgern Sie, dass $1 < f(x) < x$ für alle $x \in (1, \infty)$. (5 P.)

(c) Sei $x_0 = 100$. Wir definieren rekursiv $x_n := f(x_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent ist und bestimmen Sie ihren Grenzwert. (10 P.)

Aufgabe 3: (25 Punkte)

(a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^3+k^2+1} z^k$ absolut konvergent? (8 P.)

(b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. (8 P.)

(c) Bestimmen Sie, ob die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ konvergent ist und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert. (4 P.)

(d) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\big((2k)!\big)^3}{\big(2(k!)\big)^4} z^k$. (5 P.)

Aufgabe 4: (20 Punkte)

(a) Geben Sie ein Beispiel einer Bijektion

$$f : \mathbb{N} \to \big\{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist nicht ungerade}\big\}$$

(und zeigen Sie, dass Ihr Konstrukt tatsächlich eine Bijektion ist). (10 P.)

(b) Bestimmen Sie die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ der Menge $M = \Big\{1, \{1,2\}, \{1,2,3\}\Big\}$. (10 P.)

Aufgabe 5: (20 Punkte)

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

(a) $\left(\frac{3n+1}{\sqrt{16n^3-5n^2+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (6 P.)

(b) $\left(\frac{1}{2^n}\binom{n+k}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ für festes $k \in \mathbb{N}$ (7 P.)

(c) $\left(\sqrt[n]{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (7 P.)