Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 2023–2024
2. Klausur

Analysis für Informatiker

Name:

Matrikelnummer:

Wichtige Informationen:

- Als Hilfsmittel ist alles in Papierform erlaubt. Elektronische Hilfsmittel sind nicht erlaubt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausur besteht aus sechs Aufgaben mit insgesamt 100 Punkte.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein. Begründen Sie alle Ihre Antworten!

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Summe**

Aufgabe 1: (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie Zahlen $r \in [0, \infty)$ und $\phi \in \mathbb{R}$, sodass $3 + 3i = re^{i\phi}$. (5 P.)

(b) Skizzieren Sie die Menge

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) + 1\}$$

in $\mathbb{C}$. (5 P.)

Aufgabe 2: (15 Punkte)

(a) Geben Sie ein Beispiel einer surjektiven aber nicht injektiven Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$.(7 P.)

(b) Geben Sie ein Beispiel einer injektiven aber nicht surjektiven Abbildung $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$.(8 P.)

Beweisen Sie für beide gefragten Beispiele, dass sie die erwünschten Eigenschaften haben.

Aufgabe 3: (20 Punkte)

(a) Bestimmen Sie, ob die Folge $\left(\dfrac{(-1)^n n^2+1}{3n^3+1}e^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. (5 P.)

(b) Bestimmen Sie, ob die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k!)^k}{\big((k+1)!\big)^{k+1}}$ konvergiert. (5 P.)

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} e^k\frac{k^2+k+1}{2k^2+k+1}(-1)^k z^k$ (5 P.)

(d) Bestimmen Sie für welche $x\in[0,\infty)$ die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$ konvergent ist und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwert. (5 P.)

Aufgabe 4: (20 Punkte)
Betrachten Sie die Funktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2-x}{x^2-1} & (x \neq 1), \\ 0 & (x = 1). \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Minima und Maxima der Funktion.

Aufgabe 5: (15 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x + 3 & (x \in \mathbb{Q}), \\ 4\sqrt{x} & (x \notin \mathbb{Q}). \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie alle Stellen $x \in [0, \infty)$ wo f stetig ist. (8 P.)

(b) Bestimmen Sie alle Stellen $x \in [0, \infty)$ wo f differenzierbar ist. (7 P.)

Aufgabe 6: (20 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in [1, \infty)$ ein $T \geq 1$ existiert, sodass

$$t^{x-1} e^{-t} \leq e^{-\frac{t}{2}}$$

für alle $t \geq T$. Folgern Sie, dass für jedes $x \in [1, \infty)$ das uneigentliche Integral

$$f(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt$$

existiert. (6 P.)

(b) Zeigen Sie, dass $f(1) = 1$. (3 P.)

(c) Beweisen Sie, dass $f(x+1) = x f(x)$ für alle $x \in [1, \infty)$. (6 P.)
Hinweis: Partielle Integration.

(d) Beweisen sie mit vollständiger Induktion, dass $f(k) = (k-1)!$ für alle $k \in \mathbb{N}$. (5 P.)