Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 2023–2024
2. Klausur

Analysis für Informatiker

Lehramt GyGe/BK mit Fach Informatik nach der neuen PO

Name:

Matrikelnummer:

Wichtige Informationen:

- Als Hilfsmittel ist alles in Papierform erlaubt. Elektronische Hilfsmittel sind nicht erlaubt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausur besteht aus fünf Aufgaben mit insgesamt 100 Punkte.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein. Begründen Sie alle Ihre Antworten!

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**Summe**

Aufgabe 1: (20 Punkte)

(a) Bestimmen Sie Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ sodass $(a+bi)^2 = 2i$. (7 P.)

(b) Skizzieren Sie die Menge

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) + 1\}$$

in $\mathbb{C}$. (6 P.)

(c) Sei $z = \dfrac{1+3i}{3+4i}$. Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $\overline{z} = a + bi$. (7 P.)

Aufgabe 2: (20 Punkte)

(a) Geben Sie ein Beispiel einer surjektiven aber nicht injektiven Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$.

(10 P.)

(b) Geben Sie ein Beispiel einer injektiven aber nicht surjektiven Abbildung $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$.

(10 P.)

Beweisen Sie für beide gefragten Beispiele, dass sie die erwünschten Eigenschaften haben.

Aufgabe 3: (20 Punkte)

(a) Bestimmen Sie, ob die Folge $\left(\dfrac{n^2+1}{3n^3+1}3^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. (5 P.)

(b) Bestimmen Sie, ob die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k!)^k}{\big((k+1)!\big)^{k+1}}$ konvergiert. (5 P.)

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}3^k\frac{k^2+k+1}{2k^2+k+1}(-1)^k z^k$ (5 P.)

(d) Bestimmen Sie für welche $x\in\mathbb{R}$ die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$ konvergent ist und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwert. (5 P.)

Aufgabe 4: (20 Punkte)
Sei $a_1 = \sqrt{2}$ und definiere die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv für $n \in \mathbb{N}$ durch

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $0 < a_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (7 P.)

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist. (7 P.)
Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass $a_{n+1}^2 - a_n^2 > 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

(c) Bestimmen Sie, ob $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. (6 P.)

Aufgabe 5: (20 Punkte)

a) Bestimmen Sie, falls existent, Maximum, Minimum, Infimum und Supremum der Menge

$$A = [1,2] \setminus \left\{2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Begründen Sie Ihre Antwort. (10 P.)

b) Seien X und Y nicht leere Mengen und $f : X \to Y$ eine injektive Abbildung. Zeigen Sie, dass für alle Teilmengen $A, B \subseteq X$ die Identität

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

gilt. (10 P.)