

## Analysis für Informatiker

Lehramt GyGe/BK mit Fach Informatik nach der neuen PO

Name:

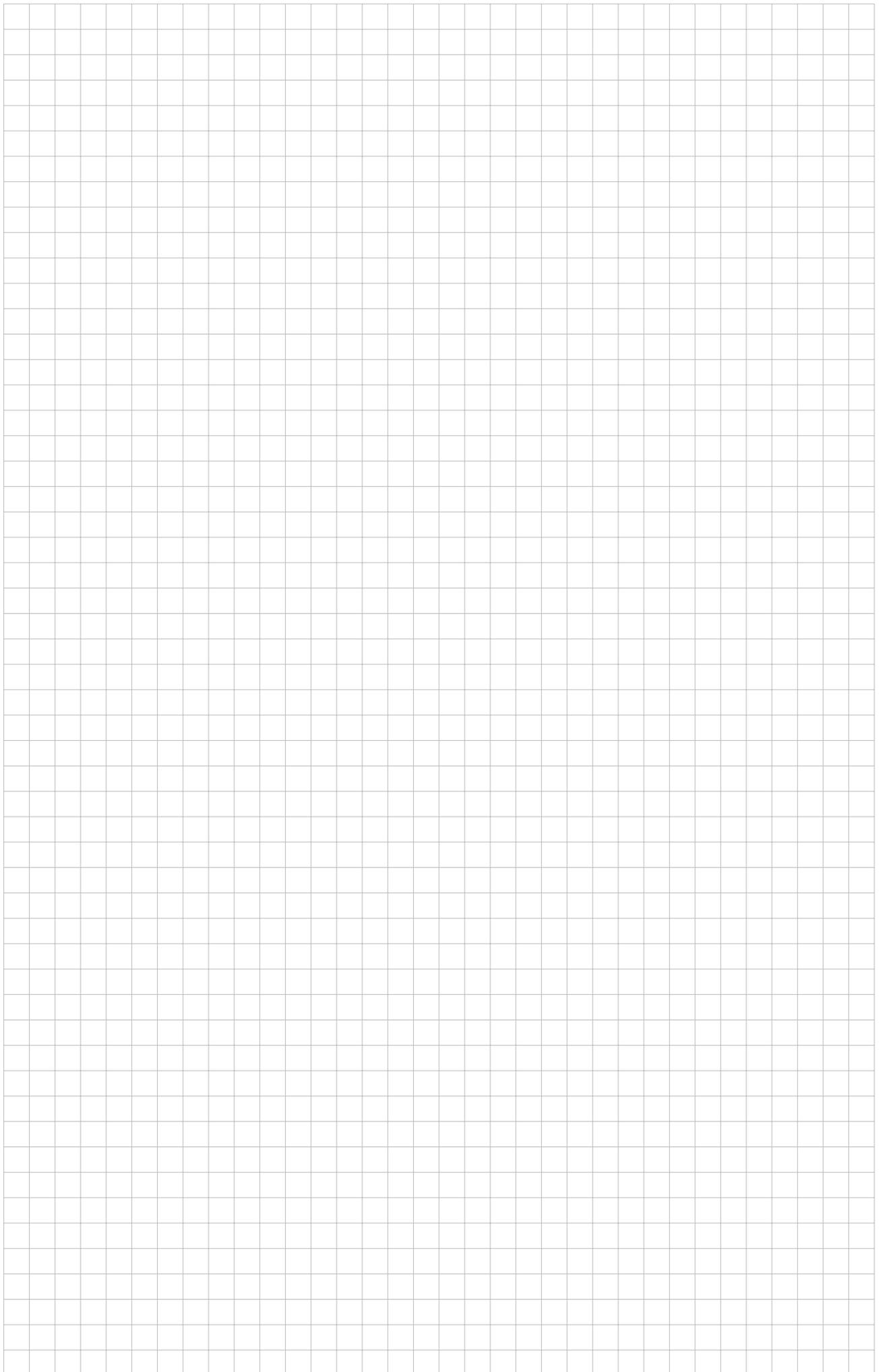
Matrikelnummer:

Wichtige Informationen:

- Als Hilfsmittel ist alles in Papierform erlaubt. Elektronische Hilfsmittel sind nicht erlaubt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausur besteht aus fünf Aufgaben mit insgesamt 100 Punkte.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein. Begründen Sie alle Ihre Antworten!

---

1	2	3	4	5	Summe



**Aufgabe 1:** (20 Punkte)

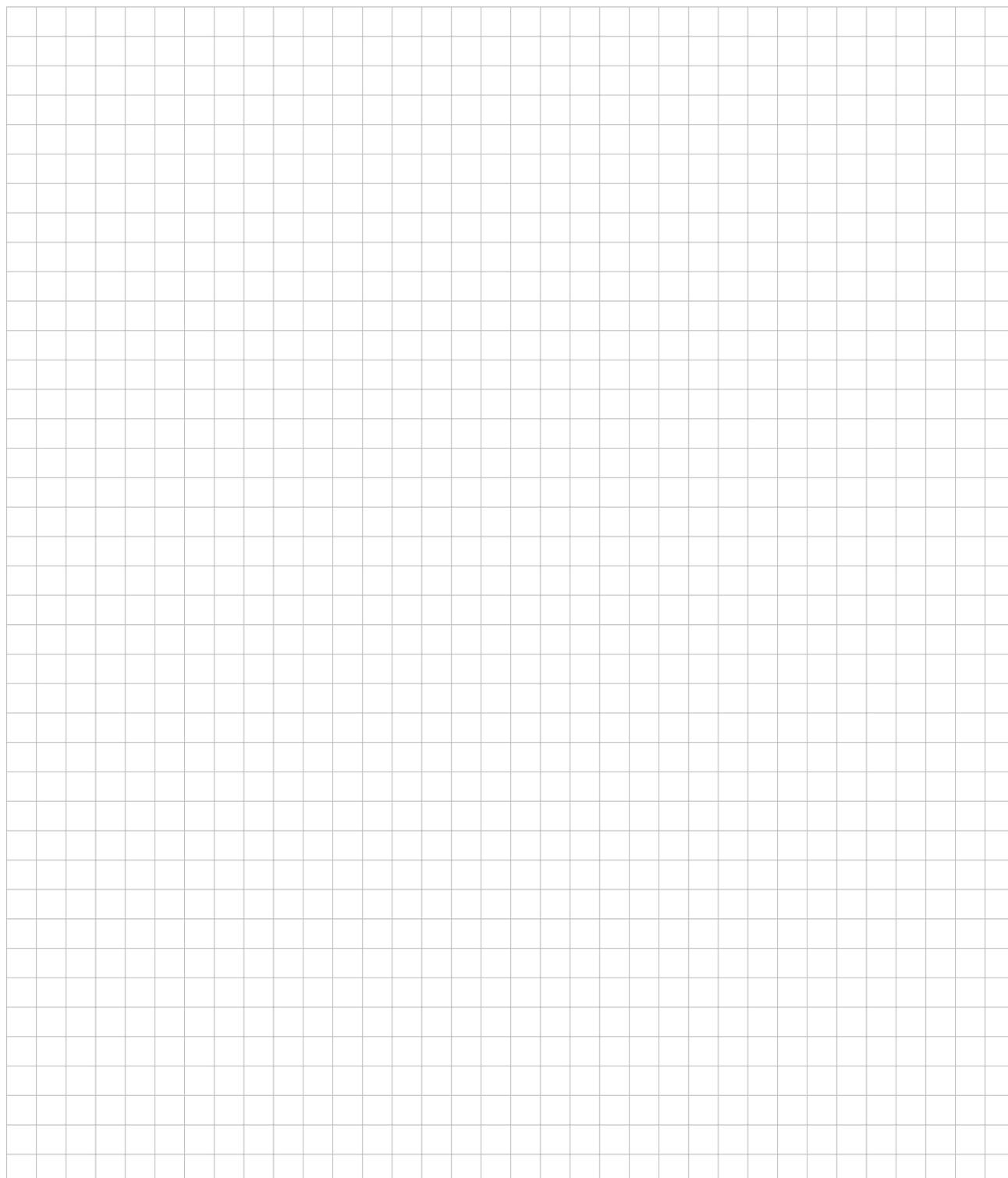
(a) Bestimmen Sie Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$  sodass  $(a + bi)^2 = 2i$ . (7 P.)

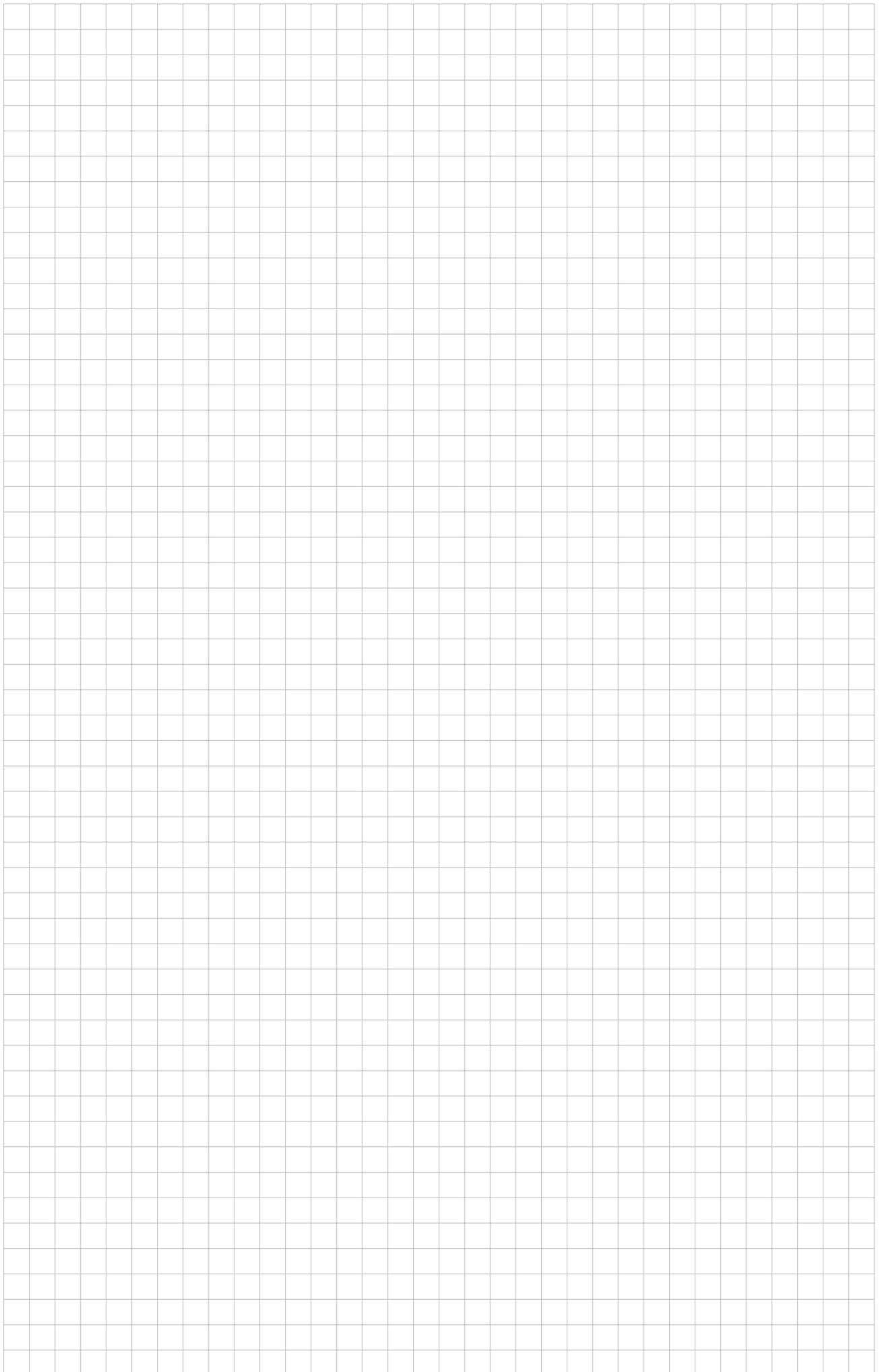
(b) Skizzieren Sie die Menge

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) + 1\}$$

in  $\mathbb{C}$ . (6 P.)

(c) Sei  $z = \frac{1 + 3i}{3 + 4i}$ . Bestimmen Sie  $a, b \in \mathbb{R}$ , sodass  $\bar{z} = a + bi$ . (7 P.)





**Aufgabe 2:** (20 Punkte)

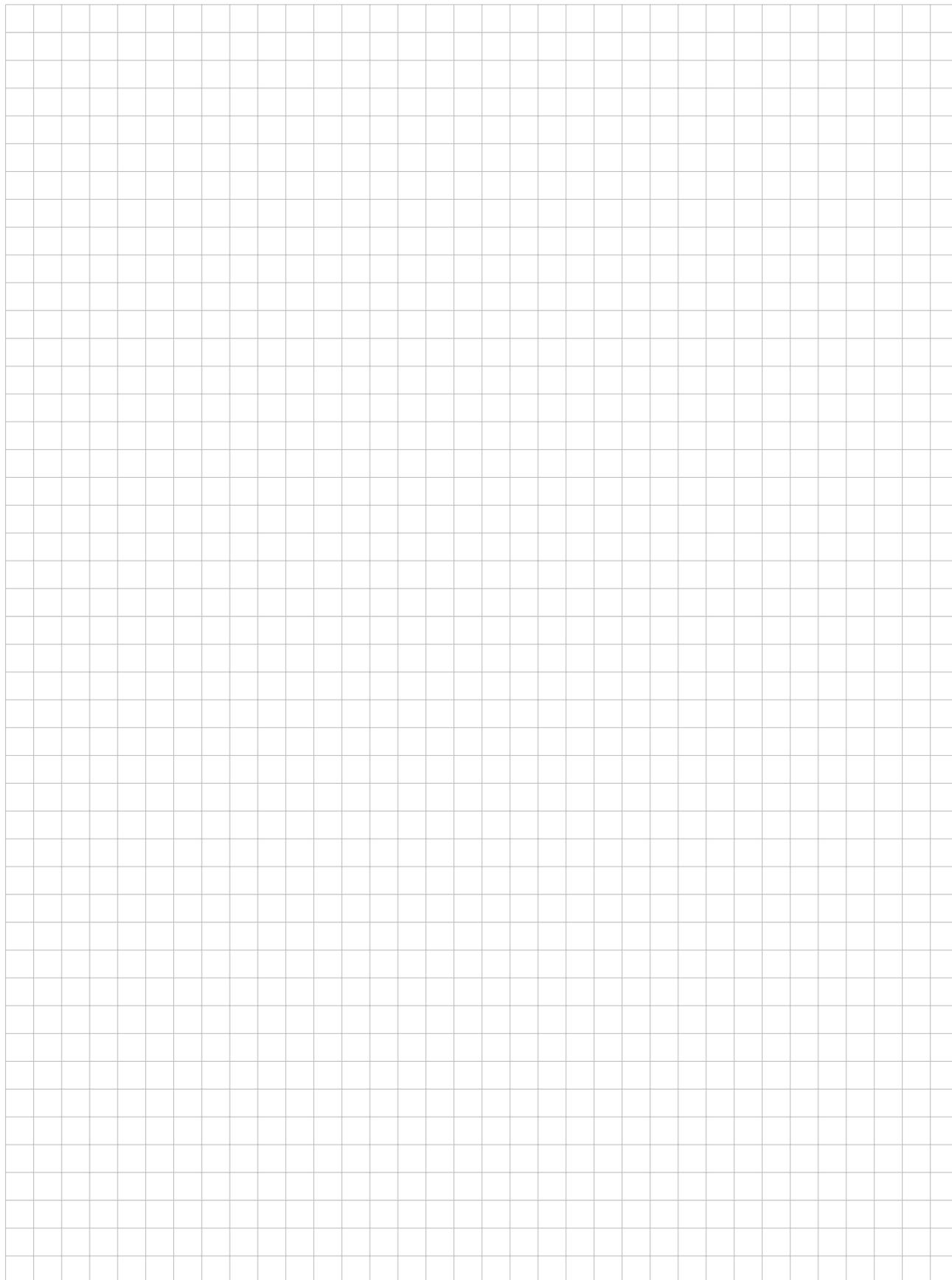
(a) Geben Sie ein Beispiel einer surjektiven aber nicht injektiven Abbildung  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ .

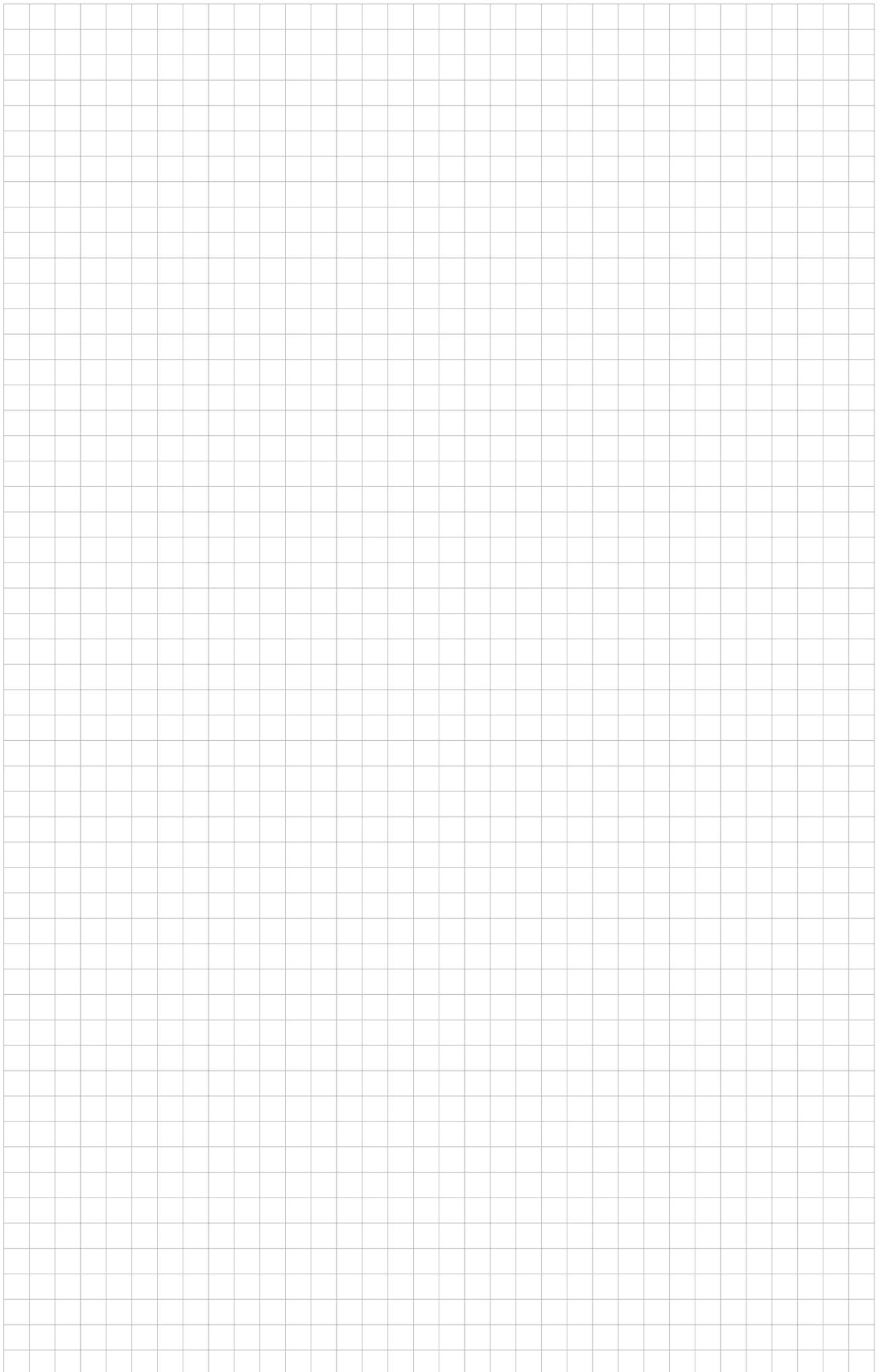
(10 P.)

(b) Geben Sie ein Beispiel einer injektiven aber nicht surjektiven Abbildung  $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ .

(10 P.)

Beweisen Sie für beide gefragten Beispiele, dass sie die erwünschten Eigenschaften haben.





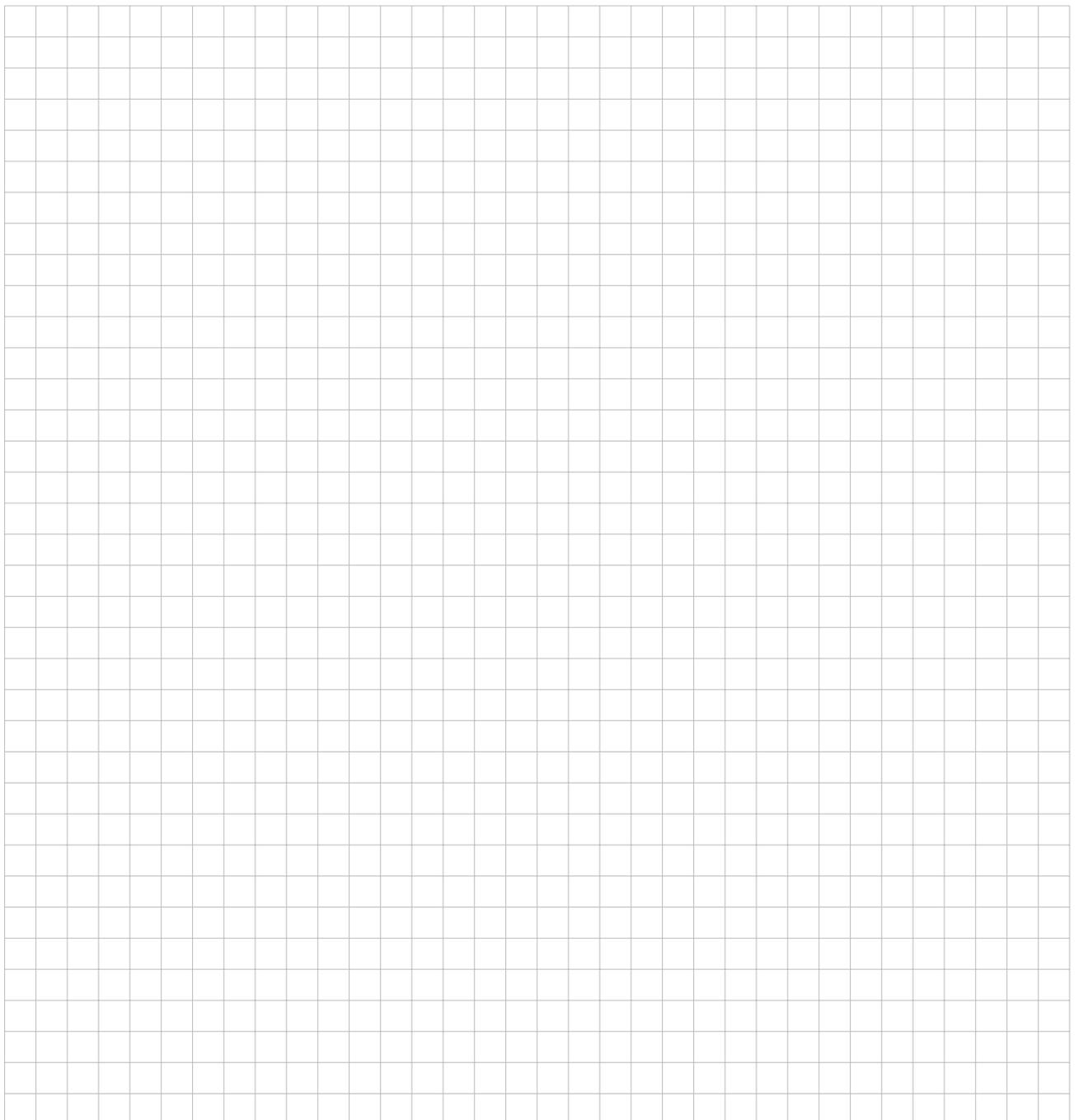
**Aufgabe 3:** (20 Punkte)

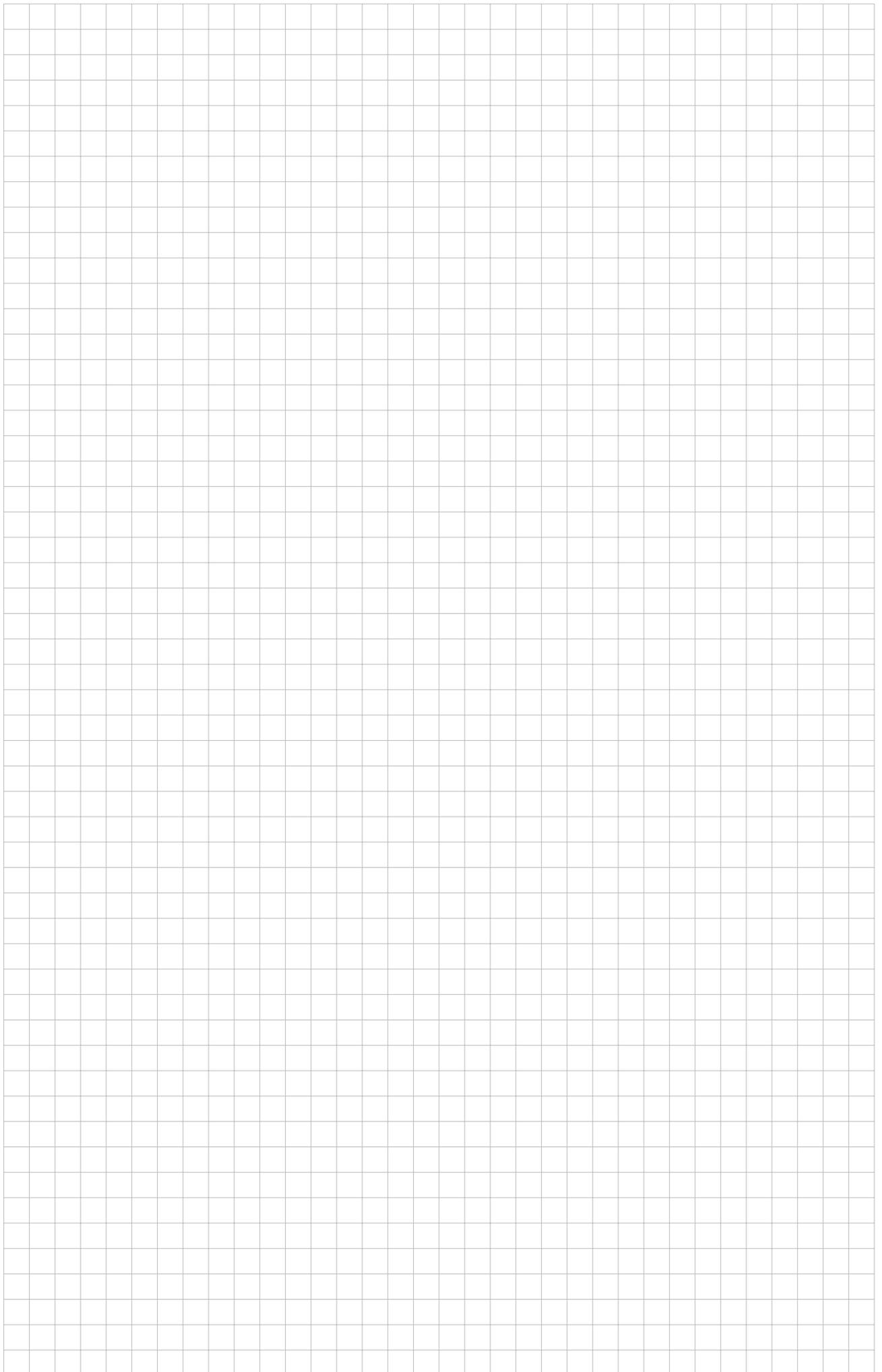
(a) Bestimmen Sie, ob die Folge  $\left(\frac{n^2 + 1}{3n^3 + 1} 3^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert. (5 P.)

(b) Bestimmen Sie, ob die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^k}{((k+1)!)^{k+1}}$  konvergiert. (5 P.)

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} 3^k \frac{k^2 + k + 1}{2k^2 + k + 1} (-1)^k z^k$  (5 P.)

(d) Bestimmen Sie für welche  $x \in \mathbb{R}$  die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$  konvergent ist und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwert. (5 P.)



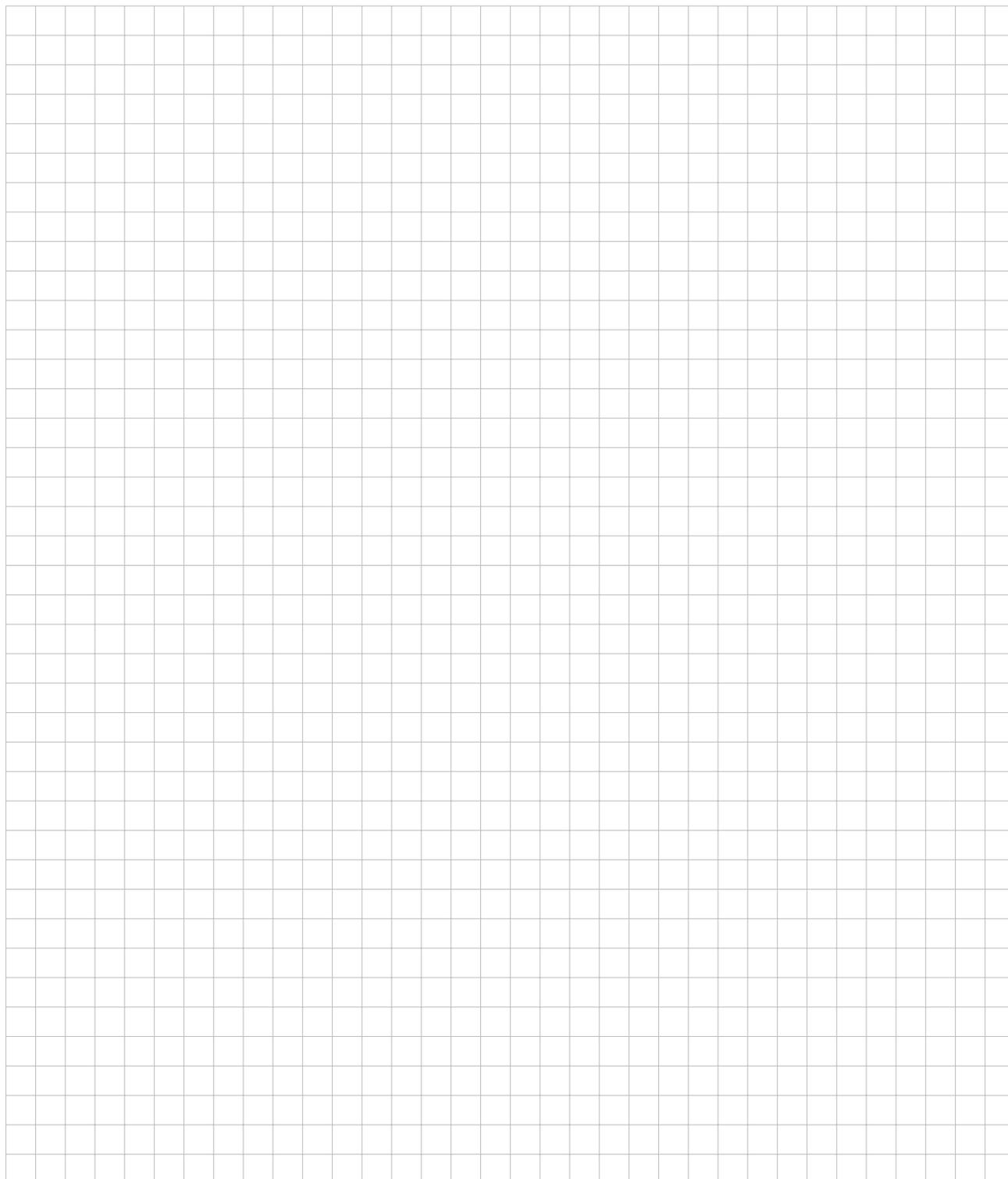


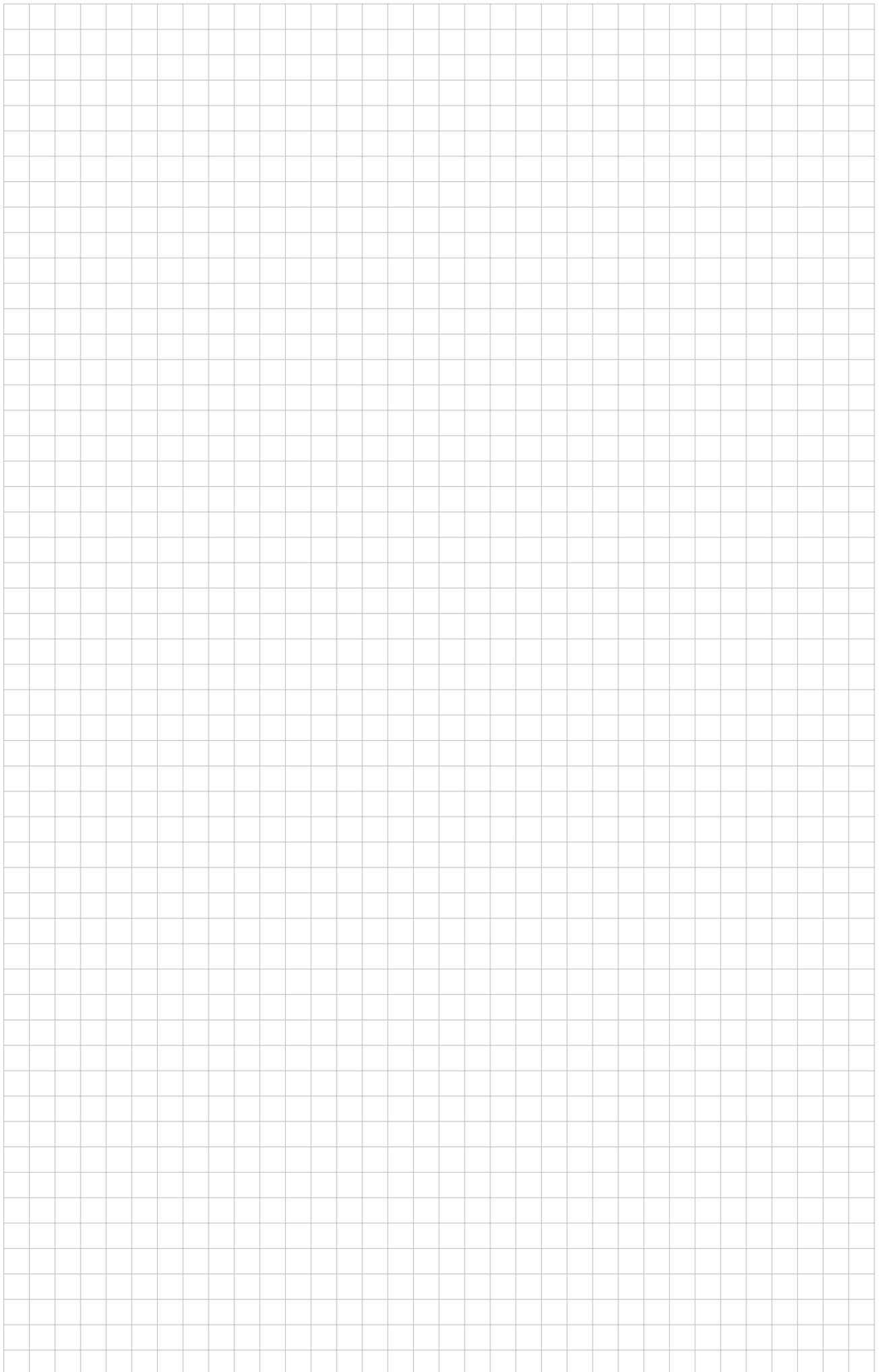
**Aufgabe 4:** (20 Punkte)

Sei  $a_1 = \sqrt{2}$  und definiere die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  rekursiv für  $n \in \mathbb{N}$  durch

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $0 < a_n < 2$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . (7 P.)
- (b) Zeigen Sie, dass die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend ist. (7 P.)  
*Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass  $a_{n+1}^2 - a_n^2 > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .*
- (c) Bestimmen Sie, ob  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent ist und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. (6 P.)





**Aufgabe 5:** (20 Punkte)

- a) Bestimmen Sie, falls existent, Maximum, Minimum, Infimum und Supremum der Menge

$$A = [1, 2] \setminus \left\{ 2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

(10 P.)

- b) Seien  $X$  und  $Y$  nicht leere Mengen und  $f : X \rightarrow Y$  eine injektive Abbildung. Zeigen Sie, dass für alle Teilmengen  $A, B \subseteq X$  die Identität

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

gilt.

(10 P.)

