Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

0. Präsenzübungsblatt - Lösungen

Präsenzaufgabe 0.1 Negiere die folgenden Aussagen in Worten.

1. Es gibt ein Auto, das nicht schwarz ist.
2. Julia hat die Studienleistung erbracht und die Klausur bestanden.
3. Christian hat seinen Regenschirm vergessen oder geht zu Fuß.

Lösung:

1) Jedes Auto ist schwarz.
2) Julia hat die Studienleistung nicht erbracht oder die Klausur nicht bestanden.
3) Christian hat seinen Regenschirm nicht vergessen und geht nicht zu Fuß.

Negiere die folgenden Aussagen in Quantorenschreibweise

1. $\forall x \in \mathbb{Q}\, \exists y \in \mathbb{Q} : y^2 < x$
2. $\exists n \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N} : (m^3 + 4)^n > n$
3. $\forall \epsilon \in \{y \in \mathbb{Q} : y > 0\}\, \exists n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N} : [m \geq n \Rightarrow 1/m^2 < \epsilon]$.

Lösung:
1)$\exists x \in \mathbb{Q}\, \forall y \in \mathbb{Q} : y^2 \geq x$
2)$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N} : (m^3 + 4)^n \leq n$
3)$\exists \epsilon \in \{y \in \mathbb{Q} : y > 0\}\, \forall n \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N} : m \geq n \wedge 1/m^2 \geq \epsilon$.

(Denn

$$\neg(m \geq n \Rightarrow 1/m^2 < \epsilon) \iff m \geq n \wedge \neg(1/m^2 < \epsilon) \iff m \geq n \wedge 1/m^2 \geq \epsilon.)$$

Präsenzaufgabe 0.2 Schreibe die folgende Aussage mithilfe von Quantoren:
Für jedes Paar a und b rationaler Zahlen mit $a < b$ gibt es eine rationale Zahl r, sodass $a < r < b$.

Lösung: $\forall (a, b) \in \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x < y\}\, \exists r \in \mathbb{Q} : a < r < b$.

Präsenzaufgabe 0.3 Sei n eine natürliche Zahl. Man zeige durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Lösung: Induktionsanfang: $n = 1 : \sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 = \frac{6}{6} = \frac{1(1+1)(2*1+1)}{6}$.
Induktionsvoraussetzung (I.V.): Die Identität ist wahr für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt ($n \mapsto n+1$):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{j=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \qquad (I.V.) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)\big((n+2)(2n+3)\big)}{6} \\
&= \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)\big(2(n+1)+1\big)}{6}.
\end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 0.4 Seien A, B, C Mengen. Man zeige:

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus (B \setminus C) &\iff x \in A \wedge x \notin B \setminus C \\
&\iff x \in A \wedge \neg(x \in B \setminus C) \\
&\iff x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \notin C) \\
&\iff x \in A \wedge \big(\neg(x \in B) \vee \neg(x \notin C)\big) \\
&\iff x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C) \\
&\iff (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\
&\iff x \in A \setminus B \vee x \in A \cap C \\
&\iff x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C).
\end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 0.5 Sei M eine Menge mit n Elementen. Zeige, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ von M genau 2^n Elemente enthält.

Lösung: Beweis per Induktion über die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge:

Induktionsanfang: Sei $X = \emptyset$ die leere Menge. Dann ist die einzige Teilmenge der leeren Menge, die leere Menge, d.h. $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, und damit enthält die Potenzmenge einer Menge mit Null Elementen genau $1 = 2^0$ Elemente.

Induktionsvoraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann enthält die Potenzmenge jeder n-elementigen Menge 2^n Elemente.

Induktionsschritt ($n \mapsto n+1$): Sei X eine $n+1$-elementige Menge und $x \in X$ beliebig. Dann enthält $X \setminus \{x\}$ n-Elemente und die Potenzmenge $P(X \setminus \{x\})$ 2^n Elemente nach unserer Induktionsvoraussetzung. Es gilt

$$P(X) = P(X \setminus \{x\}) \,\dot{\cup}\, \big\{\{x\} \dot{\cup} Y : Y \in P(X \setminus \{x\})\big\}.$$

Die Menge $\big\{\{x\}\dot\cup Y : Y \in P(X \setminus \{x\})\big\}$ hat gleich viele Elemente wie $P(X \setminus \{x\})$ und da obige Vereinigung disjunkt ist erhalten wir $\#P(X) = 2\,\#P(X \setminus \{x\}) = 2\,2^n = 2^{n+1}$.

Präsenzaufgabe 0.6 Für $x \in \mathbb{Q}$ sei der Absolutbetrag $|x|$ von x definiert als

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}.$$

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Q}$, sodass $|2x^2 - 1| < 1$.

Lösung: Sei $x \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |2x^2 - 1| < 1 &\iff -1 < 2x^2 - 1 < 1 \\ &\iff -1 < 2x^2 - 1 \wedge 2x^2 - 1 < 1 \\ &\iff 0 < 2x^2 \wedge 2x^2 < 2 \\ &\iff x \neq 0 \wedge x^2 < 1 \\ &\iff x \neq 0 \wedge -1 < x < 1. \end{aligned}$$

Damit ist die Lösungsmenge gegeben durch alle von Null verschiedenen rationalen Zahlen die zwischen -1 und 1 liegen(1 und -1 ausgeschlossen).
