Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

1. Hausaufgabenblatt - Lösungen

Hausaufgabe 1.1 Seien X und Y endliche Mengen. Man zeige

(a) $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$,

(b) $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$.

Beweis: (a) Sei $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ mit $n = |X|$. Dann folgt

$$|X \times Y| = \left|\dot{\bigcup}_{j=1}^{n}(\{x_j\} \times Y)\right| = \sum_{j=1}^{n} |\{x_j\} \times Y| = \sum_{j=1}^{n} |Y| = n|Y| = |X||Y|.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}|X \cup Y| &= |(X \setminus Y)\dot{\cup}(Y \setminus X)\dot{\cup}(X \cap Y)| \\ &= |X \setminus Y| + |Y \setminus X| + |X \cap Y| \\ &= (|X| - |X \cap Y|) + (|Y| - |X \cap Y|) + |X \cap Y| \\ &= |X| + |Y| - |X \cap Y|.\end{aligned}$$

Hausaufgabe 1.2 Bestimmen Sie die Potenzmengen der folgenden Mengen:

1. $A = \{1, 2, 3\}$
2. $B = \emptyset$
3. $C = \{1, \{1\}, \{\{1\}\}\}$
4. $D = \{\emptyset, 1, \{\{1\}, 1\}\}$
5. $E = A \cap D$

Lösung:

1) $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$.
2) $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
3) $P(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1\}\}, \{\{\{1\}\}\}, \{1, \{1\}\}, \{1, \{\{1\}\}\}, \{\{1\}, \{\{1\}\}\}, C\}$
4) $P(D) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{\{\{1\}, 1\}\}, \{\emptyset, 1\}, \{\emptyset, \{\{1\}, 1\}\}, \{1, \{\{1\}, 1\}\}, D\}$
5) $P(E) = P(A \cap D) = P(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$.

Hausaufgabe 1.3 Sei n eine natürliche Zahl. Man zeige durch vollständige Induktion:

1. $\sum_{k=1}^{n}(4k - 1) = 2n^2 + n$.
2. $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$.
3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

Beweis:

1. I.A. ($n=1$): $\sum_{k=1}^{1}(4k-1) = 4*1-1 = 3 = 2*1^2+1$.
I.V.: Die 1. Gleichung gilt für ein $n \in \mathbb{N}$.
I.S. ($n \mapsto n+1$):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(4k-1) &= \sum_{k=1}^{n}(4k-1) + 4(n+1) - 1 \\
&= 2n^2 + n + 4(n+1) - 1 \qquad (I.V.) \\
&= 2n^2 + 5n + 3 \\
&= 2(n^2 + 2n + 1) + (n+1) \\
&= 2(n+1)^2 + (n+1).
\end{aligned}$$

2. I.A. ($n=1$): $\sum_{k=0}^{1} 2^k = 2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3 = 4 - 1 = 2^2 - 1$.
I.V. : Die 2. Gleichung gilt für ein $n \in \mathbb{N}$.
I.S. ($n \mapsto n+1$):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} 2^k &= \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1} \\
&= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} \qquad (I.V.) \\
&= 2 * 2^{n+1} - 1 \\
&= 2^{(n+1)+1} - 1.
\end{aligned}$$

Hinweis: Die Identität ist auch für $n=0$ korrekt. Man hätte die Induktion auch bei $n=0$ starten können - der Induktionsschritt ist in diesem Beispiel identisch.

3. I.A. (($n=1$)): $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = 1^2 = (\sum_{k=1}^{1} k)^2$.
I.V.: Die 3. Gleichung gilt für ein $n \in \mathbb{N}$.
I.S. ($n \mapsto n+1$): Wir erinnern an die Identität $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (auch kleiner Gauß genannt.) Nun zum eigentlichen Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{j=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3 \qquad (I.V.) \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{4(n+1)^3}{4} \qquad \text{(kleiner Gauß)} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \\
&= \left(\frac{(n+1)((n+2)}{2}\right)^2 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right) \qquad \text{(kleiner Gauß).}
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 1.4 Seien A, B und C Teilmengen einer Menge X. Man nennt

$$A\Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

die symmetrische Differenz von A und B. Man zeige:

(a) $(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$;

(b) $A\Delta B = A\Delta C \Longleftrightarrow B = C$.

Wir geben zwei Beweise:

1. Beweis (a) Es gilt

$$\begin{aligned}(A\Delta B) \cap C &= ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cap C \\ &= ((A \cup B) \cap C) \setminus (A \cap B) \qquad (*) \\ &= ((A \cap C) \cup (B \cap C)) \setminus (A \cap B \cap C) \qquad (\text{da } (A \cup B) \cap C \subseteq C) \\ &= ((A \cap C) \cup (B \cap C)) \setminus ((A \cap C) \cap (B \cap C)) \\ &= (A \cap C)\Delta(B \cap C).\end{aligned}$$

Beweis der zweiten Gleichheit $(*)$:

$$\begin{aligned}x \in ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cap C &\Longleftrightarrow \big((x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cap B)\big) \wedge (x \in C) \\ &\Longleftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cap B) \wedge (x \in C) \\ &\Longleftrightarrow \big((x \in A \cup B) \wedge (x \in C)\big) \wedge (x \notin (A \cap B)) \\ &\Longleftrightarrow (x \in (A \cup B) \cap C) \wedge (x \notin (A \cap B) \\ &\Longleftrightarrow x \in ((A \cup B) \cap C) \setminus (A \cap B).\end{aligned}$$

(b) Gilt $B = C$, so folgt offensichtlich $A\Delta B = A\Delta C$.

Wir zeigen nun die Aussage

$$B \neq C \Rightarrow A\Delta B \neq A\Delta C,$$

welche äquivalent zur Aussage

$$A\Delta B = A\Delta C \Rightarrow B = C$$

ist.

Sei also $B \neq C$. Dann muss gelten $B \setminus C \neq \emptyset$ oder $C \setminus B \neq \emptyset$. Wir können annehmen, dass $B \setminus C \neq \emptyset$ gilt, da wir sonst einfach die Rollen von B und C vertauschen können. Sei also $b \in B$ mit $b \notin C$. Dann gibt es zwei Fälle:

1.Fall $b \in A$: Dann gilt $b \in A \cap B$, also auch

$$b \notin A\Delta B.$$

Aufgrund von $b \in A$ und $b \notin C$ folgt aber $b \in A \cup C$ und $b \notin A \cap C$ (da $A \cap C \subseteq C$ gilt) und demnach

$$b \in A\Delta C.$$

Also gilt im 1. Fall $A\Delta B \neq A\Delta C$.

2.Fall $b \notin A$: Aufgrund von $b \notin A \cup C$ folgt

$$b \notin A\Delta C.$$

Wegen $b \in B$ folgt $b \in A \cup B$ und aufgrund von $b \notin A$ auch $b \notin A \cap B$ (da $A \cap B \subseteq A$ gilt). Insgesamt folgt also

$$b \in A\Delta B$$

also gilt im 2. Fall ebenfalls $A\Delta B \neq A\Delta C$.

2.Beweis: (via Komplementbildung und wiederholtem Einsatz von den de-morganschen Gesetzen für Mengen)

(a) Sei $Y \subseteq X$. Dann gilt per Definition $Y^c = X \setminus Y$. Ist $Z \subset X$ eine weitere Teilmenge von X so gilt $Y \setminus Z = Y \cap Z^c$. Es gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
x \in (A\Delta B) \cap C &\iff x \in ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cap C \\
&\iff x \in (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \cap C \\
&\iff x \in ((A \cap C) \cup (B \cap C)) \cap (A \cap B)^c \\
&\iff x \in (((A \cap C) \cup (B \cap C)) \cap (A \cap B)^c) \cup \emptyset \\
&\iff x \in (((A \cap C) \cup (B \cap C)) \cap (A \cap B)^c) \cup (((A \cap C) \cup (B \cap C)) \cap C^c) \\
&\iff x \in ((A \cap C) \cup (B \cap C)) \cap ((A \cap B)^c \cup C^c) \\
&\iff x \in ((A \cap C) \cup (B \cap C)) \cap (A \cap B \cap C)^c \\
&\iff x \in ((A \cap C) \cup (B \cap C)) \cap ((A \cap C) \cap (B \cap C))^c \\
&\iff x \in ((A \cap C) \cup (B \cap C)) \setminus ((A \cap C) \cap (B \cap C)) \\
&\iff x \in (A \cap C)\Delta(B \cap C).
\end{aligned}$$

(b) Gilt $B = C$, so folgt offensichtlich $A\Delta B = A\Delta C$. Es gelte nun $A\Delta B = A\Delta C$. Schneiden beider Seiten dieser Gleichung mit A liefert nach Teil (a) die Gleichung $A\Delta(A \cap B) = A\Delta(A \cap C)$ was äquivalent zu $A \setminus B = A \setminus C$ bzw. zu $B \cap A = C \cap A$ ist. Schneiden der Gleichung mit A^c anstatt von A liefert nach (a) $\emptyset\Delta(B \cap A^c) = \emptyset\Delta(C \cap A^c)$ was äquivalent zu $B \cap A^c = C \cap A^c$ ist. Wir folgern

$$\begin{aligned}
B\Delta C &= (B\Delta C) \cap (A \cup A^c) \\
&= ((B\Delta C) \cap A) \cup ((B\Delta C) \cap A^c) \\
&= ((B \cap A)\Delta(C \cap A)) \cup ((B \cap A^c)\Delta(C \cap A^c)) \\
&= \emptyset \cup \emptyset \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

Die Gleichung $B\Delta C = \emptyset$ ist aber äquivalent zu $B = C$.

Abgabe der Hausaufgaben bis Sonntag, 29.10.2023, 23.59 Uhr in Panda.