Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

1. Präsenzübungsblatt - Lösungen

Präsenzaufgabe 1.1 Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$. Dann ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gegeben durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

und entspricht der Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge. Für $k > n$ definieren wir $\binom{n}{k} = 0$.

Zeigen Sie

(i) mit einer direkten Rechnung

(ii) mit einem kombinatorischen/mengentheoretischen Beweis,

dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ die sogenannte **Pascalsche Formel**

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

gilt.

Beweis: (i) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k = n$ gilt

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n}{n+1} + \binom{n}{n} = 0 + 1 = 1\binom{n+1}{n+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < n$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\frac{n-k}{n+1} + \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\frac{k+1}{n+1} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\left(\frac{n-k}{n+1} + \frac{k+1}{n+1}\right) \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!}\left(\frac{n-k+k+1}{n+1}\right) \\
&= \binom{n+1}{k+1}\frac{n+1}{n+1} \\
&= \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}_0$, Y eine Menge mit n Elementen und $P(Y)$ die Potenzmenge von Y. Wir definieren $P(Y)_d := \{S \in P(Y) : |S| = d\}$ für $d \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $|P(Y)_d| = \binom{n}{d}$

für alle $d \in \mathbb{N}_0$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$, X eine $(n+1)$-elementige Menge und $x \in X$. Dann gilt für $k \in \{0, \dots, n\}$

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{k+1} &= |P(X)_{k+1}| \\ &= \Big|\{S \in P(X)_{k+1} : x \in S\} \dot\cup \{S \in P(X)_{k+1} : x \notin S\}\Big| \\ &= \Big|\{S \in P(X)_{k+1} : x \in S\}\Big| + \Big|\{S \in P(X)_{k+1} : x \notin S\}\Big| \\ &= \Big|\big\{\{x\} \cup T \in P(X)_{k+1} : T \in P(X \setminus \{x\})_k\big\}\Big| + \Big|P(X \setminus \{x\})_{k+1}\Big| \\ &= |P(X \setminus \{x\})_k| + |P(X \setminus \{x\})_{k+1}| \\ &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.\end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 1.2 Zeigen Sie, dass auf einer Menge mit zwei bzw. drei Elementen eine Körperstruktur existiert.

Beweis: Sei $\{a, b\} = X$ und definiere die Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ auf X durch

+	a	b
a	a	b
b	b	a

und

·	a	b
a	a	a
b	a	b

Das neutrale Element der Addition ist das Element a. Das neutrale Element der Multiplikation ist das Element b.

Für $X = \{a, b, c\}$ definieren wir Addition und Multiplikation durch

+	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

und

·	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

Neutrales Element der Addition/Multiplikation ist gegeben durch a bzw. b.

Das Nachrechnen der restlichen Axiome eines Körpers ist dem Leser überlassen.

Präsenzaufgabe 1.3 Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $x, y \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

1. $-(-x) = x$
2. $-(x+y) = -x - y$
3. $xy = 0 \iff x = 0 \vee y = 0$
4. $(-x)y = -xy = x(-y)$
5. $(-x)(-y) = xy$.

Beweis:

1. Es gilt $(-x) + x = 0$, da $-x$ das additive Inverse von x ist. Das additive Inverse von $-x$, geschrieben $-(-x)$ ist eindeutig (siehe Vorlesung), also folgt $-(-x) = x$.

2. Es gilt $x+y+(-x-y) = x+y+(-x)+(-y) = x+(-x)+y+(-y) = 0+0 = 0$, aufgrund der Kommutativität der Addition. Wegen Eindeutigkeit von additiven Inversen folgt $-(x+y) = -x-y$.

3. Für jedes $z \in \mathbb{K}$ gilt $0z = (0+0)z = 0z + 0z$ was äquivalent zu $0 = 0z$ ist. Damit folgt sofort $\Leftarrow$ von 3. Sei nun $xy = 0$. Angenommen $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Dann ist xy invertiertbar mit $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$. Also folgt aus $xy = 0$ auch $1 = (xy)^{-1}xy = (xy)^{-1}0 = 0$, aber $0 \neq 1$. Demnach ist unsere Annahme, dass $x \neq 0 \wedge y \neq 0$ falsch, also muss $x = 0 \vee y = 0$ gelten.

4. Es gilt $xy + (-x)y = (x-x)y = 0y = 0$, nach der Eindeutigkeit von additiven Inversen folgt $-xy = (-x)y$. Da die eben gezeigte Aussage für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt folgt auch $x(-y) = (-y)x = yx = xy$.

5. Es gilt $(-x)(-y) = -(x(-y)) = -(-xy) = xy$ wobei das erste und zweite Gleichheitszeichen aus 4. folgt und das dritte aus 1..

Präsenzaufgabe 1.4 In Präsenzaufgabe 0.6 wurde der Betrag $|x|$ einer beliebigen rationalen Zahl $x \in \mathbb{Q}$ definiert. Zeigen Sie, dass für $x, y \in \mathbb{Q}$ folgende Ungleichungen gelten:

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

und

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|.$$

(Hinweis: die erste Ungleichung wird "Dreiecksungleichung" genannt, die zweite "umgekehrte Dreiecksungleichung")

Gilt auch $\big||x| - |y|\big| \leq |x+y|$?

Beweis:

Für $x \in \mathbb{Q}$ gilt $|x| = \max\{x, -x\}$, denn ist $x \geq 0$ so gilt $|x| = x = \max\{x, -x\}$. Ist $x < 0$ so gilt per Definition $|x| = -x = \max\{x, -x\}$. (Mit dieser Darstellung des Betrags ist es sehr leicht zu zeigen, dass $|x| < (\leq)\, y \iff -y < (\leq)\, x < (\leq)\, y$ für alle $y \in \mathbb{Q}$, was in der Lösung von Präsenzaufgabe 0.6 verwendet wurde)
Damit folgt $\pm x \leq \max\{x, -x\} = |x|$.

Wir merken an, dass für $a, b, c \in \mathbb{Q}$ mit $c \geq b$ die Ungleichung $a + b \leq a + c$ folgt, da sie äquivalent zu $0 \leq (a+c) - (a+b) = c - b$, also zu $c \geq b$ ist.

Nun zur **Dreiecksungleichung**:

Für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ ergibt sich

$$x + y \leq |x| + y \leq |x| + |y|$$

und

$$-(x + y) = -x - y \leq |x| - y \leq |x| + |y|$$

und somit

$$|x + y| = \max\{x + y, -(x + y)\} \leq |x| + |y|.$$

Für den Beweis der **umgekehrten Dreiecksungleichung** seien wieder $x, y \in \mathbb{Q}$. Dann gilt nach der eben gezeigten Dreiecksungleichung

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$$

was äquivalent zu

$$|x| - |y| \leq |x - y|$$

ist und

$$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x|.$$

was äquivalent zu

$$-(|x| - |y|) = |y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$$

ist. (Die letzte Gleichheit folgt, da $|-z| = \max\{-z, (-(-z))\} = \max\{z, -z\} = |z|$ für alle $z \in \mathbb{Q}$ gilt.)

Damit gilt aber

$$\big||x| - |y|\big| = \max\{|x| - |y|, -(|x| - |y|)\} \leq |x - y|.$$

Die Ungleichung $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$ gilt auch für alle $x, y \in \mathbb{Q}$, denn

$$\big||x| - |y|\big| = \big||x| - |-y|\big| \leq |x - (-y)| = |x + y|$$

nach der umgekehrten Dreiecksungleichung.
