Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

10. Hausaufgabenblatt - Lösungen

Hausaufgabe 10.1 Welche der folgenden Grenzwerte existieren (in $\mathbb{R}$ oder als uneigentliche Grenzwerte $\pm\infty$)? Geben Sie den Grenzwert, falls er existiert, an. Begründen Sie Ihre Antwort.

1. $\lim_{x\to 0} f(x)$, wobei $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ (Hinweis: aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$)
2. $\lim_{x\to 0} g(x)$, wobei $g : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin(x)}{x^2}$
3. $\lim_{x\to 3} h(x)$, wobei $h : \mathbb{R}\setminus\{3\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sinh\left(\frac{1}{x-3}\right)}{\cosh\left(\frac{1}{x-3}\right)}$
4. $\lim_{x\uparrow 0} \sin(\frac{1}{x})$
5. $\lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln(x^2)}{x}$
6. $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\cos(x) - 4$
7. $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sinh(x)}{x}$
8. $\lim_{x\to\infty} \frac{ix^2+x+1}{-x^2+5x+1}$
9. $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} f(x)$ (wobei $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ beliebig ist), $\lim_{x\to\infty} f(x)$, wobei
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^3 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}.$$
(Hinweis: Verwenden Sie, dass $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$, wobei $\overline{A}$ den Abschluss einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ bezeichnet.)

Lösung:1. Für $x \neq 0$ gilt

$$\frac{e^x - e^{-x}}{x} = \frac{e^x - 1 + 1 - e^{-x}}{x} = \frac{e^x - 1}{x} - \frac{e^{-x} - 1}{x} = \frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{-x} - 1}{-x}$$

Aus der Vorlesung ist bekannt (siehe Beweis Bsp. 3 - Differenzierbarkeit der e Funktion), dass $\frac{e^x-1}{x} \to 1$ für $x \to 0$. Damit gilt auch $\frac{e^{-x}-1}{-x} \to 1$ für $x \to 0$. Nach obiger Formel folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = 1 + 1 = 2.$$

2. Wir wissen bereits, dass $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (siehe Bsp. Grenzwertbegriff). Dann gilt

$$\frac{\sin(1/n)}{\frac{1}{n^2}} = n\frac{\sin(1/n)}{\frac{1}{n}} \to +\infty \cdot 1 = \infty$$

für $n \to \infty$. Allerdings gilt auch

$$\frac{\sin(-1/n)}{\frac{1}{(-n)^2}} = -n\frac{\sin(-1/n)}{-\frac{1}{n}} \to -\infty \cdot 1 = -\infty$$

Dementsprechend existiert $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x^2}$ weder eigentlich noch uneigentlich.

3. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

(siehe Beweis von PB 9.2.7). Demnach gilt

$$\lim_{x\uparrow 3} \frac{\sinh\left(\frac{1}{x-3}\right)}{\cosh\left(\frac{1}{x-3}\right)} = \lim_{x\uparrow 3} \frac{e^{2\frac{1}{x-3}}-1}{e^{2\frac{1}{x-3}}+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

und

$$\lim_{x\downarrow 3} \frac{\sinh\left(\frac{1}{x-3}\right)}{\cosh\left(\frac{1}{x-3}\right)} = \lim_{x\uparrow 3} \frac{1-e^{-2\frac{1}{x-3}}}{1+e^{-2\frac{1}{x-3}}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

demnach existieren zwar die linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwerte, sind allerdings unterschiedlich, also existiert der beidseitige Grenzwert nicht.

4. Sei $x_n := -\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $x_n \to 0$ für $n \to \infty$, aber

$$\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\right) = \begin{cases} -1 & n \in 2\mathbb{N} \\ 1 & n \in 2\mathbb{N}_0+1 \end{cases},$$

somit ist die Folge $(\sin(1/x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ alternierend, womit der Grenzwert $\lim_{x\uparrow 0}\sin(1/x)$ weder eigentlich noch uneigentlich existiert.

5. Es gilt $\lim_{x\downarrow 0}\ln(x) = -\infty$, da $\ln(e^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und da $x \mapsto e^x$ eine strikt mononoton wachsende Bijektion von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist mit $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$. Demnach gilt

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln(x^2)}{x} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{x} \lim_{x\downarrow 0} \ln(x^2) = +\infty \cdot ((-1)\infty) = -\infty.$$

6. Für $x \neq 0$ gilt

$$0 \le \left|\frac{1}{x}\cos(x)\right| \le \frac{1}{|x|}|\cos(x)| \le \frac{1}{|x|} \to 0$$

für $x \to \infty$. Somit folgt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cos(x) - 4 = 0 - 4 = -4.$$

7. Es gilt $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x} = -\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = -\infty$, da $e^x > \frac{x^n}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x > 0$. Demnach gilt

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sinh(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}\frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}\frac{e^x}{x} - \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}\frac{e^{-x}}{x} = 0 - (-\infty) = \infty.$$

8. Für $x \neq 0$ gilt

$$\frac{ix^2+x+1}{-x^2+5x+1} = \frac{i+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{-1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}} \longrightarrow \frac{i}{-1} = -i$$

für $x \to \infty$.

9. Sei $\epsilon > 0$ und $\delta := \sqrt[3]{\epsilon}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-0| = |x| < \delta$ die Abschätzung

$$|f(x) - f(x)| = |f(x)| = \begin{cases} |x|^3 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \leq |x|^3 < \delta^3 = \epsilon.$$

Also ist f stetig in $x = 0$, womit $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ gilt. Sei nun $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{Q}$ mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $y_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass $f(x_n) = x_n^3$ und $f(y_n) = 0$. Da $\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ stetig ist, gilt $f(x_n) = x_n^3 \to x_0^3$ für $n \to \infty$. Offensichtlich gilt $f(y_n) = 0 \to 0$ für $n \to \infty$. Somit folgt

$$f(x_n) \to x_0^3 \neq 0 \leftarrow f(y_n)$$

für $n \to \infty$. Da beide Folgen gegen x_0 konvergieren, aber unterschiedliche Grenzwerte haben, ist f nicht stetig in x_0, was äquivalent dazu ist, dass der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ nicht existiert. Sei nun $x \in \mathbb{Q}$ und $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $x > 0$ und $y > 0$. Dann gilt $nx \to \infty$ und $ny \to \infty$ für $n \to \infty$. Aber $nx \in \mathbb{Q}$ und $ny \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt

$$f(nx) = (nx)^3 = x^3 n^3 \to +\infty$$

und

$$f(ny) = 0 \to 0$$

für $n \to \infty$. Damit existiert $\lim_{x\to\infty} f(x)$ weder eigentlich noch uneigentlich.

Hausaufgabe 10.2

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x\to\infty} x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \infty$$

und

$$\lim_{x\to-\infty} x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (-1)^n \infty.$$

2. Sei $c \in \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{C}$ und $x_0 \in D$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = c$$

genau dann wenn

$$f(x_0) = c \wedge \lim_{x\uparrow x_0} f(x) = c \wedge \lim_{x\downarrow x_0} f(x) = c.$$

Beweis: Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + a_{n-1}\frac{1}{x} + a_{n-2}\frac{1}{x^2} + \cdots + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\frac{1}{x^n}\right) = 1.$$

Sei $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_k \to \infty$ für $k \to \infty$ (o.B.d.A sei $x_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$), so existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$

$$\left(1 + a_{n-1}\frac{1}{x_k} + a_{n-2}\frac{1}{x_k^2} + \cdots + a_1\frac{1}{x_k^{n-1}} + a_0\frac{1}{x_k^n}\right) \geq \frac{1}{2}$$

gilt. Ist $C > 0$ beliebig, so existiert ein $k_1 \in \mathbb{N}$, sodass $x_k^n > 2C$ für jedes $k \geq k_1$ (da $x_k \to \infty$ und somit $x_k^n \to \infty$ für $k \to \infty$) Sei nun $k_2 := \max\{k_0, k_1\}$. Dann gilt für jedes $k \geq k_2$, dass

$$\begin{aligned} x_k^n + a_{n-1}x_k^{n-1} + \cdots + a_1 x_K + a_0 &= x_k^n \left(1 + a_{n-1}\frac{1}{x_k} + a_{n-2}\frac{1}{x_k^2} + \cdots + a_1 \frac{1}{x_k^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x_k^n}\right) \\ &\geq 2C\frac{1}{2} = C. \end{aligned}$$

Da $C > 0$ und die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k \to \infty$ beliebig war, folgt

$$\lim_{x\to\infty} x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \infty.$$

Für den zweiten Teil von 1. sei $\tilde{a}_k := (-1)a_k$ für $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to-\infty} x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= \lim_{x\to\infty} (-x)^n + a_{n-1}(-x)^{n-1} + \cdots + a_1(-x) + a_0 \\ &= (-1)^n \lim_{x\to\infty} x^n + (-1)^{-1}a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + (-1)^{-(n-1)}a_1 x + (-1)^{-n}a_0 \\ &= (-1)^n \lim_{x\to\infty} x^n + \tilde{a}_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \tilde{a}_1 x + \tilde{a}_0 \\ &= (-1)^n \infty \end{aligned}$$

nach dem ersten Teil von 1. Damit folgt 1. insgesamt.

2. Gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$, so gilt per Definition des Grenzwertes $f(x_n) \to c$ für $n \to \infty$ für **jede** Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $x_n \to x_0$. $(*)$

Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D \cap (-\infty, x_0)$ (bzw. in $D \cap (x_0, \infty)$) mit $x_n \to x_0$. Dann gilt nach $(*)$ $f(x_n) \to c$ für $n \to \infty$. Somit folgt (per Definition!) $\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = c$ (bzw. $\lim_{x\downarrow x_0} f(x) = c$). Da $x_0 \in D$, also im x_0 in der Definitionsmenge von f liegt, muss $f(x_n) \to c$ für $n \to \infty$ auch für die **konstante** Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := x_0 (n \in \mathbb{N})$ gelten. Aber in diesem Fall gilt $f(x_0) = f(x_n) \to c$ für $n \to \infty$ und somit $f(x_0) = c$.

Es gelte nun

$$f(x_0) = c \wedge \lim_{x\uparrow x_0} f(x) = c \wedge \lim_{x\downarrow x_0} f(x) = c.$$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Angenommen es ist $x_n > x_0$ (bzw. $x_n < x_0$) für nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$, so folgt aufgrund von $f(x_0) = c$ und $\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = c$ (bzw $\lim_{x\downarrow x_0} f(x) = c$, dass $f(x_n) \to c$ für $n \to \infty$. Sei nun $x_n > x_0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ und $x_n < x_0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Sei $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ die Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestehend aus allen Folgenglieder x_n mit $x_n < 0$ und $(y_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ die Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestehend aus den Folgengliedern x_n mit $x_n \geq x_0$. Dann wissen wir bereits, dass $f(x_{n_k}) \to c$ und $f(y_{m_k}) \to c$ für $k \to \infty$. Somit gilt aber auch $f(x_n) \to c$ für $n \to \infty$.

Hausaufgabe 10.3 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) > a$ und $f(b) < b$. Zeigen Sie, dass ein $x \in (a, b)$ existiert mit $f(x) = x$ (Hinweis: Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf die Abbildung $F : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - x$ an).

Beweis: Sei $F(x) := f(x) - x$ für $x \in [a, b]$. Dann gilt nach Voraussetzung

$$F(a) = f(a) - a > 0$$

und

$$F(b) = f(b) - b < 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $x \in (a, b)$ mit

$$0 = F(x) = f(x) - x.$$

Dementsprechend gilt für eben dieses $x \in (a, b)$ die Identität $f(x) = x$.

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Sonntag den 07.01.2024, 23.59 Uhr in Panda.